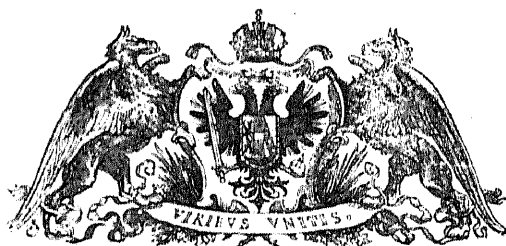


DENKSCHRIFTEN
DER
KAISERLICHEN
ADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

ZWEIUNDFÜNFZIGSTER BAND.



WIEN.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

1887.

IIA Lib.

CANON DER FINSTERNISSE.

VON

HOFRATH PROF. TH. RITTER V. OPPOLZER,

WIRKLICHEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Mit 160 Tafeln.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 25. OCTOBER 1885.

Einleitung.

Durch meine „Syzygientafeln für den Mond“ (Publication der astronomischen Gesellschaft XVI, Leipzig, Engelmann 1881) und meine „Tafeln zur Berechnung der Mondesfinsternisse“ (im XLVII. Bande der Denkschriften der math.-naturw. Classe der kais. Akademie der Wissenschaften zu Wien) habe ich Hilfsmittel dargeboten, welche die Berechnung der näheren Umstände jeder Sonnen- oder Mondfinsterniss ohne allzu grosse Arbeit ermöglichen; die in diesen Tafeln eingeführten Abkürzungen sind derart beschaffen, dass dadurch in der Genauigkeit der Resultate keine nennenswerthe Einbusse zu befürchten ist.

Obwohl sich die Bestimmung einer Finsterniss auf Grund dieser Hilfsmittel sehr einfach gestaltet, so schien es mir doch, dass die Berechnung der Elemente aller Finsternisse, die sich innerhalb eines für unsere gegenwärtigen Zwecke hinreichend umfassenden Zeitraumes ereignet haben oder ereignen werden, eine Arbeit sei, welche für die Wissenschaft einen bleibenden Werth behalten wird, wenn auch die Grundlagen dieser Rechnungen durch die Fortschritte der Theorie in der Zukunft vielleicht nicht unerhebliche Verbesserungen erfahren werden. Von diesem Standpunkte aus wird die nunmehr vorliegende Berechnung der Elemente und der Hilfsgrössen für 8000 Sonnenfinsternisse und 5200 Mondfinsternisse, die ich mit grossen materiellen Opfern zu Stande gebracht habe, jedenfalls für alle künftigen Untersuchungen als Richtschnur benutzt werden können; mit Rücksicht auf diesen mir vorschwebenden Zweck habe ich mir erlaubt, der Sammlung den Titel „Canon“ vorzusetzen. Es dürfte daher wohl gerechtfertigt erscheinen, dass dieser Canon, um seinem Titel gerecht zu werden, innerhalb des von ihm in Betracht gezogenen Zeitraumes alle überhaupt möglichen Finsternisse anführe, wenn auch von dem grössten Theile derselben wohl niemals Gebrauch gemacht werden wird.

Was oben in Bezug auf zukünftige Verbesserung der Grundlagen gesagt wurde, ist theilweise noch vor Abschluss dieser Arbeit eingetreten; Herr F. K. Ginzel hat in seinen schönen Untersuchungen über historische Finsternisse, welche, auf meine Syzygientafeln und auf einige damals schon fertiggestellte Theile des vorliegenden Canons gegründet, in drei Abhandlungen in den Sitzungsberichten der math.-naturw. Classe der kais. Akademie der Wissenschaften erschienen sind (Band LXXXV, II. Abth., Märzheft, LXXXVIII, II. Abth., Juliheft, LXXXIX, II. Abth., Märzheft), und welche in Folge der Bedeutung der erlangten Resultate von der Pariser Akademie durch die Ertheilung des Valz'schen Preises für das Jahr 1884 ausgezeichnet wurden, gezeigt, dass die von mir in den Syzygientafeln angeführten empirischen Correctionen noch erheblicher Verbesserungen fähig seien, und hat in der dritten der oben genannten Abhandlungen die von ihm für dieselben gewonnenen Resultate mitgetheilt. Es müsste daher erwünscht erscheinen, den Canon auf die Ginzel'schen empirischen Correctionen zu gründen, statt auf jene, welche die Syzygientafeln und die Tafeln zur Berechnung der Mondesfinsternisse angeben; jedoch war dies nicht mehr möglich, denn die vorliegende Arbeit war bereits grossen Theils fertiggestellt, bevor Ginzel's Untersuchungen ihren Abschluss fanden. Da indessen durch diese neuen Correctionen, insbesondere für historische Finsternisse, nur in seltenen Fällen halbwegs beträchtlich

veränderte Resultate erhalten werden, so wird man schliessen können, dass dieser dem Canon schon gegenwärtig anhaftende Mangel ihn doch seines Werthes nicht beraubt; doch wird es sich empfehlen, falls eine Finsterniss aus älterer Zeit mit ganz besonderer Genauigkeit gerechnet werden soll, auf diese eben erwähnten Correctionen Rücksicht zu nehmen; um aber die hiezu erforderliche Neuberechnung der Elemente der Finsternisse zu umgehen, beabsichtigt Dr. R. Schram in der nächsten Zeit der kais. Akademie Hilfstafeln vorzulegen, welche in einfacher Weise die hiefür erforderlichen, an die Zahlen des Canons anzubringenden Verbesserungen angeben.

Bezüglich der Zeitgrenzen, die im Detail durch die Einrichtung der Syzygientafeln bedingt wurden, schien es für die nächsten Zwecke kaum nöthig, wesentlich über das Jahr 1200 v. Chr. Geb. zurückzugreifen; anderseits wurden die Rechnungen, um gegenwärtig schon ein Bild für die Zukunft zu entwerfen, bis in das 22. Jahrhundert unserer Zeitrechnung ausgedehnt; die Finsternisse des 20. Jahrhunderts hat Herr Dr. E. Mahler (Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften, Band XLIX) auf Grund dieser Zahlen näher ausgeführt.

Der Canon in seiner vorliegenden Gestalt soll hauptsächlich dem Historiker bei seinen schwierigen chronologischen Untersuchungen behilflich sein. Die zahlreichen Nachrichten über Sonnen- und Mondfinsternisse, die sich aus dem Alterthum und Mittelalter erhalten haben, geben in Verknüpfung mit anderen historischen That- sachen ein werthvolles Material zur Ordnung der Chronologie ab; ja, ich glaube nicht allzuviel zu behaupten, wenn ich die Meinung ausdrücke, dass diese Notizen fast allein es ermöglichen, die Chronologie des Alterthums überhaupt in erträgliche Ordnung zu bringen. Die richtige Beurtheilung von Finsternissnachrichten ist indessen keine leichte, da für jeden Fall zumeist mehrere Finsternisse nachgewiesen werden können, welche der Über- lieferung genügen, weshalb anderweitige, meist als Nebenumstände zu bezeichnende Angaben von Seite der Historiker herangezogen werden müssen, um mit einiger Wahrscheinlichkeit die thatsächlich gemeinte Finster- niss herauszufinden. Wenn auch die werthvolle Arbeit Pingré's in der Art de vérifier les dates den Historikern hier schon eine Leitung gegeben hat, so dürfte doch der vorliegende Canon, der, wie es im Fortschritte der Wissenschaft begründet ist, wesentlich genauere Zahlen und diese selbst in grösserer Vollständigkeit vorführt, ihnen um so willkommener sein, weil die beigegebene Iconographie, deren Verwendung weiter unten erläutert wird, sie in den Stand setzt, sich das bezügliche Material, sofern es sich um bedeutende Finsternisse handelt, ganz ohne Rechnung selbst herauszusuchen. Es wird dadurch dem Historiker die Möglichkeit der Entscheidung geboten, ob für seine Frage nur eine oder ob mehrere Finsternisse in Betracht kommen; und seine daran sich knüpfenden Forschungen können daher auf breiterer Basis aufgebaut werden. Will man die näheren Umstände einer Sonnenfinsterniss für einen bestimmten gegebenen Ort mit Genauigkeit ermitteln, so lässt sich wohl eine kleine Rechnung nicht umgehen, die dem Historiker im Allgemeinen schwer fallen dürfte; es wird aber jedem Astronomen oder auch überhaupt jedem mit der Anwendung mathematischer Formeln vertrauten Manne leicht möglich sein, diese Rechnungen durchzuführen, wenn er nur die hiezu nöthigen, den im Canon enthaltenen Hilfs- grössen angepassten Formeln zur Verfügung hat. Aus dem letzteren Grunde habe ich, besonders da eine solche Formelsammlung keinen allzugrossen Raum beansprucht, eine vollständige Zusammenstellung der für die erwähnten Zwecke nöthigen Formeln, die sich der nunmehr so ziemlich allgemein angenommenen Hansen's- chen Theorie der Sonnenfinsternisse der Hauptsache nach anschliessen, beigegeben; übrigens gibt auch hier die von Dr. R. Schram in den Denkschriften der Wiener kais. Akademie (Band LI) publicirte Abhandlung: „Tafeln zur Berechnung der näheren Umstände der Sonnenfinsternisse“, wenn es sich darum handelt, ein genähert richtiges Resultat zu erlangen, die Hilfsmittel an die Hand, die für den Historiker erforderlichen Rechnungen auf einen so einfachen Mechanismus zu reduciren, dass dieselben leicht bei sehr mässiger Übung selbst von Personen, denen der Calcul sonst fern liegt, bewältigt werden können. Man kann daher die eben erwähnten Schram'schen Tafeln als überaus werthvolle Ergänzung zum vorliegenden Canon betrachten.

Der Werth einer Arbeit wie der vorliegenden beruht hauptsächlich auf ihrer Verlässlichkeit, weshalb ich besondere Massnahmen ergriffen habe, um die Richtigkeit der in dem Canon enthaltenen Zahlen, so weit dies überhaupt bei einer solch umfassenden calculatorischen Arbeit erreichbar ist, und so weit es die zu Grunde

gelegten Tafeln gestatten, verbürgen zu können; ich glaube die Behauptung zuversichtlich aussprechen zu dürfen, dass sich in dem Canon nur sehr wenige Fehler vorfinden werden. Es wird erwünscht sein, hier die zu diesem Zwecke ergriffenen Massregeln auseinanderzusetzen. Die Einrichtung der Syzygientafeln bringt es mit sich, dass die Arbeit in gewisse Abschnitte, Cyclen, eingetheilt ist; innerhalb eines solchen Cyclen können die Argumente für alle möglicherweise stattfindenden ekliptischen Syzygien durch successive Addition der entsprechenden Zuwächse der Argumente der Reihe nach erhalten werden, und am Schlusse eines solchen Cyclen wird die Übereinstimmung der so erhaltenen Argumente mit dem Resultate der directen Rechnung eine gute Prüfung für die Richtigkeit aller Argumentwerthe innerhalb des ganzen Cyclen abgeben. Auf diese Weise kann sich daher jeder Rechner selbst nahezu völlige Bürgschaft für die correcte Durchführung dieses so wichtigen Abschnittes seiner Arbeit verschaffen; da aber trotzdem noch der Fall denkbar ist, dass innerhalb eines Cyclen in demselben Argumente vielleicht mehrere Fehler begangen wurden, die sich im Schlussresultate zufälligerweise ausgleichen, so wurde auch dieser Theil der Rechnung durch eine zweite, unabhängig durchgeführte Rechnung geprüft. Mit Hilfe der so gewonnenen Argumente wurden durch eine doppelte, von zwei Rechnern in völlig unabhängiger Weise ausgeführte Operation die Elemente der Sonnenfinsternisse mittelst der Syzygientafeln (mit Zuziehung der daselbst gegebenen empirischen Correctionen), jene der Mondfinsternisse mittelst der Tafeln zur Berechnung der Mondesfinsternisse ermittelt, dann beide Rechnungen sorgfältig wiederholt verglichen und erst nach Verbesserung der auftretenden Differenzen bis zur völligen Übereinstimmung der beiderseitigen Zahlen, die letzten Stellen nicht ausgenommen, abgeschlossen. Mit dieser Arbeit ist zugleich die Bestimmung der Mondfinsternisse fast vollendet; für die Sonnenfinsternisse war aber die Ermittlung weiterer Hilfsgrössen und für die centralen Finsternisse besonders die Berechnung der Hauptpunkte der Centralität sehr wünschenswerth, durch welche Zusätze eben die Zahlen des Canons in erhöhten Masse brauchbar werden. Auch hiebei ist eine doppelte, unabhängige Rechnung als erstes Erforderniss zur Erreichung einigermaßen vertrauenswürdiger Resultate betrachtet worden, doch konnte man diese doppelte Rechnung, besonders wegen der historisch wichtigen, centralen Finsternisse nicht genügen lassen, da von beiden Rechnern bisweilen die gleichen Zeichen- und Quadrantenfehler gemacht worden sein konnten, die dann übereinstimmende und doch fehlerhafte Resultate zu Tage gefördert hätten. Um auch hiefür die nöthige Sicherheit zu schaffen, wurde zuletzt mit Hilfe geeignet construirter Hilfstafeln, welche mittelst der Argumente B , L und $\log \Delta L$ die auf den rechts liegenden Seiten des Canons eingetragenen Hilfsgrössen in leichter Weise und verhältnissmässig grosser Annäherung direct finden lassen, die Bestimmung der Hauptpunkte der Centralität und der anderen Hilfszahlen nochmals vorgenommen, und die so gewonnenen Resultate mit den früheren verglichen; ein grösserer Fehler konnte nunmehr nicht leicht der Aufmerksamkeit entgehen. In der That erwies sich diese Controle, welche von Herrn Strobl durchgeführt und von Herrn Ginzel revidirt wurde, nicht zwecklos, da dieselbe noch einige, wenn auch nicht erhebliche Incorrectheiten aufdeckte. Ich meine daher, dass auf diese Weise meinerseits Alles geschehen ist, um den Zahlen des Canons eine mit Recht zu fordernde Authenticität zu geben.

Die Herstellung des Canons, welcher 121 Cyclen umfasst, bedurfte des Zusammenwirkens mehrerer Rechner, und es dürfte hier der geeignete Ort sein, in übersichtlicher Weise den Antheil hervorzuheben, welchen jeder Rechner an diesem grossen Werke genommen hat. Bei der folgenden statistischen Zusammenstellung war ich, um derselben durch allzuviel Details nicht eine ungebührliche Ausdehnung zu geben, oft genöthigt, nur den Hauptantheil, den ein Rechner an einem Abschnitte genommen hat, zu notiren; ausserdem muss ich hier der unermüdeten Thätigkeit des Herrn F. K. Ginzel in besonderer Weise Erwähnung thun, der bei der Revision der Resultate und deren Richtigstellung im Vereine mit mir einen wesentlichen Antheil an der Vollendung der Arbeit hat, ohne dass dies in dem folgenden Schema bemerkbar ist.

Directors der k. k. Hof- und Staatsdruckerei Hofrathes A. v. Beck zu erfreuen, wofür ich demselben zu grossem Danke verpflichtet bin. Die erste Correctur wurde mit dem Originalmanuscripte gelesen, welches aus den beiderseitigen Rechnungen fertiggestellt worden war und durch mehrfache Vergleichen gesichert erschien; die zweite Correctur wurde mit den Zahlen der einen, die dritte mit jenen der anderen Rechnung direct gelesen. Bei dieser umfassenden und mühevollen Arbeit bin ich in aufopferungsvoller Weise von Herrn Alois Steinmaszler unterstützt worden; ich erlaube mir, ihm an dieser Stelle meinen Dank auszusprechen; desgleichen muss ich hier der eifrigen Mithilfe des Herrn Josef Strobl Erwähnung thun, sowie der des Herrn Dr. Franz Kühnert; bei der Correctur der ersten Druckbogen wirkte überdies in sehr erspriesslicher Weise Herr F. K. Ginzl mit. Um aber ganz sicher zu sein, dass nicht etwa ein Versehen bei der Fertigstellung der Druckplatten für die definitiven Abzüge vorgefallen sei, haben die Herren Dr. R. Schram und Dr. E. Mahler nochmals die Aushängbogen einer vollständigen Controle unterzogen; die Fehler, welche bei derselben bemerkt wurden, waren meist nicht einem Übersehen bei den früheren Correcturen zuzuschreiben und beschränken sich grösstentheils auf Beschädigungen, welche die Ziffern durch die Druckoperation erfahren hatten. Im Ganzen blieben zwei Fehler in den Zahlenangaben, welche bei den früheren Correcturen übersehen worden waren; gewiss ein sehr befriedigendes Resultat. Das Fehlerverzeichnis ist am Schlusse des Textes angeführt und zeigt eine allerdings grössere Anzahl von Fehlern, die sich jedoch in anderer Weise in die Tafeln eingeschlichen haben; ausserdem wird man häufigere Correcturen in den ersten drei Bogen bemerken, doch sind diese Fehler eigentlich nicht als solche zu betrachten, sondern erklären sich aus dem Umstande, dass man anfänglich alle Finsternisse, die nicht central erscheinen, zu den partiellen gezählt hatte; über die schärfere, später eingeführte Trennung berichtet die für die *L*-Columnne gegebene Erläuterung. Ich meine daher, dass demnach die Correctheit des vorliegenden Canons selbst hochgespannten Forderungen im vollsten Masse genügen werde.

I.

Canon der Sonnenfinsternisse.

Erläuterung der im Canon der Sonnenfinsternisse angeführten Zahlenwerthe.

Der Canon der Sonnenfinsternisse enthält die Elemente und die Hilfsgrössen aller Finsternisse, welche sich zwischen dem Datum:

— 1207 November 10 (julianisch)
und 2161 November 17 (gregorianisch)

ereignen. Als Grundlage hiezu dienten meine eingangs erwähnten Syzygientafeln, durch deren Einrichtung die Zeitgrenzen im Detail bedingt wurden, mit Hinzuziehung der dort gegebenen empirischen Correctionen. Zufolge der Abzählung der Gattung der Finsternisse findet man, dass in einem julianischen Jahrhunderte durchschnittlich 237·5 Sonnenfinsternisse stattfinden, von denen für die Erde überhaupt 83·8 partiell, 77·3 ringförmig, 10·5 ringförmig-total und 65·9 total sind. Die Anordnung der Zahlen in dem Canon der Sonnenfinsternisse ist so getroffen, dass mit Ausnahme der letzten Columnne die linke Seite die Elemente, die rechte Seite die Hilfsgrössen enthält.

Die Columnen jeder linken Seite sind:

1. Columnne. Nr., enthält die fortlaufende Nummer der Finsternisse.
2. Columnne. *T*, gibt dem Wesen nach die Weltzeit der wahren ekliptischen Conjunction und zerfällt in drei Subcolumnen: Die erste enthält das Datum, wie die Überschrift darstellt, bis zum October 1582 in julianischer, von da ab in gregorianischer Zählung; die zweite Subcolumnne gibt den zum Datum gehörigen Tag der julianischen Periode und wurde hauptsächlich deshalb angesetzt, um mittelst dieser Zahl auf etwaige andere Kalenderzählungen mit Hilfe der Schram'schen Hilfs-

tafeln für Chronologie (im XLV. Bd. der Denkschriften der math.-naturw. Classe der kais. Akad. der Wissensch. in Wien) in bequemer Weise übergehen zu können. Ein weiterer, allerdings nicht wesentlicher Vorthail der Angabe der zum Datum gehörigen julianischen Tage besteht darin, dass man dadurch im Stande ist, den Wochentag des vorgesetzten Datums zu bestimmen. Dividirt man nämlich die dem Datum entsprechende Tageszahl der julianischen Periode durch sieben, so ist der Tag ein:

	Montag,	wenn der Rest 0,
	Dienstag,	" " " 1,
Sept 32	Mittwoch,	" " " 2,
	Donnerstag,	" " " 3,
	Freitag,	" " " 4,
	Samstag,	" " " 5,
	Sonntag,	" " " 6 ist.

Die dritte Subcolumnne gibt in Stunden, Minuten und deren Decimalthellen die Weltzeit (bürgerliche Greenwicher Zeit) der wahren ekliptischen Conjunction.

- 3. Columnne. L' , ist die zur Zeit der wahren Conjunction stattfindende scheinbare Länge der Sonne und des Mondes.
- 4. Columnne. Z , ist die Zeitgleichung in Einheiten des Grades; wollte man dieselbe in Einheiten der Zeitminute erhalten, so hätte man sie vorher mit 4 zu multipliciren. Die Zeitgleichung ist durchaus im Sinne „mittlere — wahre Zeit“ angesetzt und gibt also die Correction an, die man zur wahren Zeit algebraisch hinzulegen muss, um die mittlere zu erhalten.
- 5. Columnne. ϵ , stellt die zur Zeit der Finsterniss stattfindende Schiefe der Ekliptik dar.
- 6. Columnne. P , gibt die Grösse P , welche in Verbindung mit $\log p$ aus der achten Columnne durch die Formel $B = p \sin P$ die Grösse $B = \frac{\sin(b-b')}{\sin(\pi-\pi')}$ finden lässt, in welcher letzterer Formel b und b' beziehungsweise die Mond- und Sonnenbreiten, π und π' die zugehörigen Parallaxen bezeichnen. B ist der Werth der von Hansen mit Q bezeichneten Coordinate des Schattenkreismittelpunktes für den Moment der wahren Conjunction.
- 7. Columnne. Q , enthält die Grösse Q , welche in Verbindung mit $\log q$ aus der zehnten Columnne durch die Formel $\Delta B = q \cos Q$ die Grösse ΔB oder die stündliche Änderung des oben B genannten Ausdruckes darstellt.
- 8. Columnne. $\log p$, siehe unter 6. Columnne.
- 9. Columnne. $\log \Delta L$, gibt den log der stündlichen Änderung des Ausdruckes $\frac{\cos b \sin(L-L')}{\sin(\pi-\pi')}$, in welchem L und L' die scheinbaren Mond- und Sonnenlängen vorstellen. Es ist dies die stündliche Änderung der von Hansen mit P bezeichneten Coordinate des Schattenkreismittelpunktes, welcher letztere selbst für den Moment der wahren Conjunction gleich Null ist.
- 10. Columnne. $\log q$, siehe unter 7. Columnne.
- 11. Columnne. u_a , ist der Halbmesser des Schattenkreises in der durch den Mittelpunkt der Erde senkrecht auf die Axe des Schattenkegels gelegten Ebene in Einheiten des Erdhalbmessers.
- 12. Columnne. $\log f_a$, gibt den log des Bogens, welcher dem Erzeugungswinkel des Schattenkegels entspricht.
- 13. Columnne. $\log \gamma$, enthält den log der Grösse γ , welche Grösse selbst sich in der dritten Columnne der rechten Seite vorfindet.

Die Columnnen der rechten Seite sind:

- 1. Columnne Nr., enthält wieder die fortlaufende Nummer der Finsterniss, um die Zusammengehörigkeit der Ziffern beider Seiten zu sichern.
- 2. Columnne. μ , enthält den Stundenwinkel der wahren Sonne unter dem Meridian von Greenwich zur Zeit der grössten Phase der Finsterniss.

- 3. Columnne. γ , gibt die kleinste Entfernung des Erdmittelpunktes von der Axe des Schattenkegels in Einheiten des Erdhalbmessers.
- 4. Columnne. $\log n$, gibt den \log . der stündlichen Bewegung des Schattencentrums auf der Durchschnittsline der relativen Mondbahn mit der durch den Mittelpunkt der Erde senkrecht auf die Schattenkegelaxe gelegten Ebene in Einheiten des Erdhalbmessers.
- 5. Columnne. G , gibt die Hilfsgrösse G .
- 6. Columnne. K , gibt die Hilfsgrösse K .
- 7. Columnne. $\log \sin g$, gibt die Hilfsgrösse $\log \sin g$.
- 8. Columnne. $\log \sin k$, gibt die Hilfsgrösse $\log \sin k$.
- 9. Columnne. $\log \cos g$, gibt die Hilfsgrösse $\log \cos g$.
- 10. Columnne. $\log \cos k$, gibt die Hilfsgrösse $\log \cos k$.
- 11. Columnne. $\log \sin \delta'$, gibt den \log . \sin . der Sonnendecination zur Zeit der wahren Conjunction.
- 12. Columnne. $\log \cos \delta'$, gibt den \log . \cos . desselben Winkels.
- 13. Columnne. N' , gibt den Winkel an, welchen die relative Mondbahn zur Zeit der wahren Conjunction mit dem Declinationskreise bildet.

Die zur Berechnung der vorstehenden Hilfsgrössen nöthigen Formeln sind:

$$\begin{aligned} B &= p \sin P & \Delta B &= q \cos Q \\ \sin \delta' &= \sin I' \sin \varepsilon & \operatorname{tg} h &= \cos I' \operatorname{tg} \varepsilon. \end{aligned}$$

δ' als Sonnendecination und h sind stets innerhalb der Grenzen 0° bis $\pm 90^\circ$ zu nehmen, also $\cos \delta'$ und $\cos h$ stets positiv; $\cos \delta'$ lässt sich immer aus $\sin \delta'$ mit Sicherheit bestimmen.

$$\begin{aligned} n \sin N_1 &= \Delta L \\ n \cos N_1 &= \Delta B. \end{aligned}$$

Der Quadrant von N_1 ist so zu bestimmen, dass n positiv gefunden wird.

$$\gamma = B \sin N_1.$$

Bezeichnet man mit d die in Decimaltheile des Tages umgesetzte Weltzeit, so bestimmt sich die Hilfsgrösse μ nach der Formel:

$$\mu = 360 \cdot d - Z - \frac{15}{n} B \cos N_1 \pm 180^\circ;$$

ferner ist noch zu berechnen:

$$\begin{aligned} N' &= N_1 - h \\ \sin g \sin G &= \sin \delta' \sin N' & \sin k \sin K &= \sin N' \\ \sin g \cos G &= \cos N' & \sin k \cos K &= \sin \delta' \cos N' \\ \cos g &= \cos \delta' \sin N' & \cos k &= \cos \delta' \cos N'. \end{aligned}$$

Die Quadranten von G und K werden so bestimmt, dass $\sin g$ und $\sin k$ immer positiv sind.

Somit erscheint der Zusammenhang der auf der rechten Seite des Canons vor dem stark ausgezogenen Verticalstrich stehenden Hilfsgrössen mit den Sonnenfinsternisselementen dargestellt.

Die 14. Columnne enthält in drei Subcolumnen, deren jede wieder in zwei weitere zerfällt, die Angabe der drei Hauptpunkte der Centralität. Die erste Subcolumnne gibt die von Greenwich gezählte geographische Länge (östlich positiv, westlich negativ) und Breite desjenigen Punktes, an welchem die Centralität bei Sonnenaufgang, die zweite jenen Ort, für den die Centralität im Mittag, die dritte jenen, an welchem die Centralität im Momente des Sonnenunterganges stattfindet. Für Finsternisse, die auf der Erde überhaupt nur partiell sind, liegt es in der Natur der Sache, dass

Aufgangspunkt.	Untergangspunkt.
$\operatorname{tg} t_u = \frac{\operatorname{tg}(N' + W)}{\sin \delta'}$	$\operatorname{tg} t_u = -\frac{\operatorname{tg}(N' - W)}{\sin \delta'}$
$\sin t_u$ muss mit $\sin(N' + W)$ ungleich bezeichnet sein.	$\sin t_u$ muss mit $\sin(N' - W)$ gleich bezeichnet sein.
$\sin \varphi_u = -\cos \delta' \cos(N' + W)$	$\sin \varphi_u = \cos \delta' \cos(N' - W)$
$\tau_u = \mu - \tau'$	$\tau_u = \mu + \tau'$
$\lambda_u = t_u - \tau_u$	$\lambda_u = t_u - \tau_u$

Ist in der 15. Columnne das Symbol r oder t geklammert, also (r) oder (t) angesetzt (der Fall $(r-t)$ kommt in den vorliegenden 8000 Finsternissen überhaupt nicht vor), so erhalten die in der 14. Columnne stehenden Zahlen eine etwas andere Bedeutung. Es sind nämlich die so bezeichneten Finsternisse solche, die zwar nirgends für die Erde central werden, jedenfalls aber die Grösse von 12 Zoll erreichen. Für diese Finsternisse sind die angesetzten Punkte demnach nicht für die Centrallinie zu verstehen, sondern es gelten für die auf der nördlichen Hemisphäre sichtbaren Finsternisse die Punkte der südlichen zwölfzölligen Curve, für diejenigen auf der südlichen Hemisphäre dagegen jene der nördlichen zwölfzölligen Curve. Im Allgemeinen werden sich diese zwölfzölligen Curven ähnlich wie jene der Centralität verhalten, und es wird meist, aber nicht immer, der Mittags- oder Mitternachtspunkt fehlen. Die bezüglichen Unterscheidungsmerkmale sind ähnlich wie früher gewählt; ist kein Mittagspunkt, wohl aber ein Mitternachtspunkt vorhanden, so erscheint die Angabe in der Columnne des Mittags eingeklammert, fehlt aber ein solcher ganz, und sind demnach die Punkte Aufgangs- oder Untergangspunkte, so ist im ersten Falle die in der Untergangscolumnne stehende geographische Position, im anderen Falle jene in der Aufgangscolumnne geklammert. Die Rechnung für diese nicht sehr häufigen Fälle ist der Consequenz halber für eine rein sphärische Erde, und zwar in der folgenden Weise durchgeführt.

Zuerst bestimmt man u'_i nach:

$$u'_i = 0.5473 - u'_u.$$

Bezeichnet man den absoluten Werth von u'_i dadurch, dass über den betreffenden Buchstaben ein positives Zeichen gesetzt wird, und setzt dann $\gamma \mp u'_i = \sin W$, wobei der obere Werth gilt, wenn γ positiv, der untere, wenn γ negativ ist, so wird W zwischen den Grenzen 0° bis $\pm 90^\circ$ anzunehmen sein, und man hat dann:

$$\begin{array}{ccc} \tau' = \frac{15}{n} \cos W & & \\ \operatorname{tg} t_u = \frac{\operatorname{tg}(N' + W)}{\sin \delta'} & \left| & \operatorname{tg} t_u = -\frac{\operatorname{tg}(N' - W)}{\sin \delta'} \\ \sin t_u \text{ ungleich bezeichnet mit } \sin(N' + W) & & \sin t_u \text{ gleich bezeichnet mit } \sin(N' - W) \\ \sin \varphi_u = -\cos \delta' \cos(N' + W) & & \sin \varphi_u = \cos \delta' \cos(N' - W) \\ \tau_u = \mu - \tau' & & \tau_u = \mu + \tau' \\ \lambda_u = t_u - \tau_u & & \lambda_u = t_u - \tau_u \end{array}$$

$$\sin(\varphi_m - \delta') = \frac{\sin W}{\sin N'}$$

$$\lambda_m = -\mu - \frac{15}{n} \cos N' \sin(\varphi_m - \delta').$$

Auch hierbei ist natürlich zu beachten, dass wenn $\varphi_m > \pm 90^\circ$ wird, man statt φ_m seine Ergänzung zu $\pm 180^\circ$ zu nehmen und das zugehörige λ_m um $\pm 180^\circ$ zu vermehren hat. Es gehören dann wieder φ_m und λ_m einem Mitternachtspunkte an und erscheinen im Canon in Klammern gesetzt.

Zufolge der Syzygientafeln hat man für die Grenzen der Finsternisse anzunehmen:

$$B = p \sin P.$$

- 1) $B < 1.0048$, so ist die Finsterniss central,
- 2) $1.0048 < B < 1.0073 + u'_a$, so ist die Finsterniss nicht central,
- 3) $1.0073 + u'_a < B$, so ist die Finsterniss unmöglich.

Für die Grenzen zwischen Totalität und Ringförmigkeit erhält man:

- 4) $u'_a < 0.5473$, so ist die Finsterniss total,
- 5) $0.5473 < u'_a < 0.5519$, so ist die Finsterniss ringförmig-total,
- 6) $0.5519 < u'_a$, so ist die Finsterniss ringförmig.

Zu diesen durch die Syzygientafeln gegebenen Grenzen, welche für die kugelförmige Erde gelten, wären die folgenden Bemerkungen zu machen. Zunächst ist in der Gleichung 2) nach einer Bemerkung des Dr. Robert Schram statt des Ausdruckes „partiell“ das Wort „nicht central“ gewählt worden, da es möglich ist, dass an sich nicht centrale Finsternisse in allerdings seltenen Fällen doch total oder ringförmig sein können. Für solche Finsternisse, bei denen der absolute Werth von γ mit Rücksicht auf die Abplattung der Erde zwischen den Grenzen 0.9970 und 1.0300 eingeschlossen ist, wurde die Entscheidung in der folgenden Weise vorgenommen:

$$u'_a < 0.5473 \text{ und } 0.9970 < \overset{+}{\gamma} + u'_a < 1.5447, \text{ so ist die Finsterniss total, aber nicht central (t).}$$

$$0.5473 < u'_a < 0.5519 \text{ und } 0.9970 < \overset{+}{\gamma} < 0.4501 + u'_a, \text{ so ist die Finsterniss ringförmig-total, aber nicht central (r-t).}$$

$$u'_a > 0.5519 \text{ und } 0.9970 < \overset{+}{\gamma} < 0.4501 + u'_a, \text{ so ist die Finsterniss ringförmig, aber nicht central (r).}$$

Für alle nicht centralen Finsternisse also, die aber stellenweise doch total oder ringförmig erscheinen können, sind die analogen Bezeichnungen in Klammern eingesetzt und sind, wie schon oben bei Erläuterung der 14. Columnne hervorgehoben wurde, die Hauptpunkte der 12zölligen Phase gerechnet.

Bezüglich der für ringförmig-totale Finsternisse aufgestellten Grenzbestimmungen wäre zu bemerken, dass innerhalb dieser Grenzen wohl ein Übergang von der Ringförmigkeit in die Totalität stattfinden kann, aber nicht muss. Das Kriterium, ob in der That für eine vorgelegte Finsterniss die Bezeichnung *r-t* beizubehalten oder nur *r* anzusetzen sei, findet sich leicht, wie folgt:

$$\log f_i = 9.9978 + \log f_a$$

$$u'_i = 0.5473 - u'_a$$

$$\frac{u'_i}{f_i} < \cos W.$$

Ist diese Ungleichung erfüllt, so erscheint in der That die Finsterniss in den Enden der Centralzone ringförmig, gegen ihre Mitte hin total; ist aber diese Bedingung nicht erfüllt, so bleibt die Finsterniss an allen Orten ringförmig. Dementsprechend sind alle Finsternisse, für welche die obigen Grenzbestimmungen *r-t* ergaben, näher untersucht und eventuell auf die Bezeichnung *r* zurückgeführt worden.

Die Bestimmung der Hauptpunkte der Centralität gilt für eine kugelförmige Erde. Zufolge der Abplattung der Erde werden einige wenige Finsternisse, für welche die obigen Grenzbestimmungen die Bezeichnung *p* finden lassen, völlig unsichtbar. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn $\overset{+}{\gamma}$ zwischen 1.5200 und 1.5800 liegt, und wenn $\overset{+}{\gamma} > 0.9970 + u'_a$ wird. Diese Finsternisse wären daher eigentlich aus dem Canon auszuschneiden gewesen; sie sind aber der Consequenz halber beibehalten worden, nur wurde der Buchstabe *p* in Klammern gesetzt. Die mit (*p*) bezeichneten Finsternisse finden also zufolge einer genaueren Rechnung nicht statt.

Die den Buchstaben beigefügten Sternchen finden ihre nähere Erläuterung bei den Karten, nur soll gleich hier hervorgehoben werden, dass der Zusatz eines Sternchens den Hinweis enthält, dass alle drei Punkte in das Gebiet einer Karte fallen, welche die gesammte nördliche Hemisphäre und den Gürtel vom Äquator bis zu 30° südlicher Breite zur Darstellung bringt.

Da bei der Grenzbestimmung für den Eintritt einer Sonnenfinsterniss auf die Säcularglieder und auf die Einführung einer empirischen Correction keine Rücksicht genommen wurde, so wäre es bei einer Combination

von ausserordentlichen Umständen immerhin möglich, dass eine oder die andere Finsterniss bei Berücksichtigung derselben vorhanden ist, während sie ohne Rücksichtnahme auf dieselben als nicht eintretend bezeichnet werden muss. Ein wesentlicher Nachtheil kann aber hieraus um so weniger entstehen, als es sich hier bloss um Finsternisse handelt, deren Eintreten nur mit Hilfe grösserer optischer Hilfsmittel constatirt werden kann, und zwar nur in der Nähe des Horizontes in Gegenden, die den Polen der Erde verhältnissmässig nahe liegen. Übrigens sind die Finsternisse innerhalb der Zeitgrenzen des Canons in dieser Richtung untersucht worden, und es hat sich hiebei keine Correctur der Angaben des Canons als erforderlich erwiesen.

Zusammenstellung der Formeln zur Berechnung der näheren Umstände der Sonnenfinsternisse.

Ich gebe hier noch eine ausführliche Zusammenstellung aller zur Ermittlung der wichtigsten Umstände einer Finsterniss nöthigen Formeln, dem Wesen nach Hansen's Theorie der Sonnenfinsternisse entsprechend (Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandter Erscheinungen. Abhandl. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. IV.), doch sind an manchen Orten einige für die vorliegenden Zwecke als zulässig zu bezeichnende Abkürzungen eingeführt und hie und da zweckmässige Abänderungen vorgenommen worden.

I. Ermittlung der Umstände einer Sonnenfinsterniss für die Erde überhaupt.

a) Gemeinsame Hilfsgrössen und Formeln zur Bestimmung der Grenzkurven.

Angenommene Abplattung der Erde $e = \frac{1}{299.153}$.

$$\left. \begin{aligned} D &= \delta' + \xi' \sin \delta' \cos \delta' \\ \log \xi' &= 9.2830 \\ \nu &= -\xi' \cos g \cos k & \sin C &= \xi \cos g, & e &= \cos C \\ \log \xi &= 8.9122 & \sin C' &= \xi \cos k, & e' &= \cos C'. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots A)$$

$\xi' \sin \delta' \cos \delta'$ und ν werden in Einheiten des Grades erhalten.

Der grösste Theil der nachstehenden Formeln reducirt die Grössen zur Bestimmung der geographischen Coordinaten, für welche die gestellten Bedingungen eintreten, auf die folgenden drei Winkelgrössen H , ψ und W . Um das betreffende Formelsystem nicht mehrmals ansetzen zu müssen, führe ich dasselbe hier an, wobei die Kenntniss der drei Grössen H , ψ und W vorausgesetzt wird. Mit diesen Grössen lässt sich die geographische Breite φ und die östliche Länge λ vom Greenwicher Meridian, wie folgt, berechnen:

$$\operatorname{tg} H' = \frac{\operatorname{tg} H}{\cos (N' - W)}.$$

Die Wahl des Quadranten von $\operatorname{tg} H'$ kann nach Gutdünken vorgenommen werden.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} t &= \frac{\cos H' \operatorname{tg} (N' - W)}{\sin (H' - D)}. \\ \sin t \text{ mit } \sin (N' - W) \text{ gleich bezeichnet.} \\ \operatorname{tg} \varphi_1 &= \cotg (H' - D) \cos t \\ \varphi &= \varphi_1 + (\varphi - \varphi_1). \\ (\varphi - \varphi_1) \text{ mit dem Argumente } \varphi_1 \text{ aus der folgenden Hilfstafel I.} \\ \tau &= \mu + \frac{15}{n} e' \cos (W - \nu) + \frac{15}{n} w' \cos \psi \\ \lambda &= t - \tau. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots B)$$

Alle Winkel erscheinen in Einheiten des Grades; τ ist der Stundenwinkel der Sonne für den Hauptmeridian bei Eintritt der betreffenden Phase, t der entsprechende Stundenwinkel für den Ortsmeridian. Beide können nach Tafel V p. XXX in Zeit verwandelt werden; u' ist entsprechend den vorangehenden Annahmen zu wählen, also für die äusseren Berührungen u'_a , für die inneren u'_i .

Hilfstafel I.

$\pm \varphi_1$	$\pm (\varphi - \varphi_1)$	$\pm \varphi_1$	$\pm (\varphi - \varphi_1)$	$\pm \varphi_1$	$\pm (\varphi - \varphi_1)$	$\pm \varphi_1$	$\pm (\varphi - \varphi_1)$	$\pm \varphi_1$	$\pm (\varphi - \varphi_1)$	$\pm \varphi_1$	$\pm (\varphi - \varphi_1)$	$\pm \varphi_1$	$\pm (\varphi - \varphi_1)$
0°	0°000	13°	0°042	26°	0°076	39°	0°094	52°	0°093	65°	0°073	78°	0°039
1	003	14	045	27	078	40	094	53	092	66	071	79	036
2	007	15	048	28	080	41	095	54	091	67	069	80	033
3	010	16	051	29	081	42	095	55	090	68	067	81	030
4	013	17	054	30	083	43	096	56	089	69	064	82	026
5	017	18	056	31	085	44	096	57	088	70	062	83	023
6	020	19	059	32	086	45	096	58	086	71	059	84	020
7	023	20	062	33	088	46	096	59	085	72	056	85	017
8	026	21	064	34	089	47	096	60	083	73	054	86	013
9	030	22	067	35	090	48	095	61	081	74	051	87	010
10	033	23	069	36	091	49	095	62	079	75	048	88	007
11	036	24	071	37	092	50	094	63	078	76	045	89	003
12	039	25	074	38	093	51	094	64	076	77	042	90	0°000

β) Bestimmung des ersten und letzten Berührungspunktes des Halbschattens.

Die Aufsuchung der Punkte auf der Erdoberfläche, für welche der Eintritt der Finsterniss überhaupt zuerst und zuletzt wahrgenommen wird, bedarf einer indirecten Lösung, doch lässt sich dem Verfahren eine Form geben, dass an eine Wiederholung der Rechnung bei den hier gesteckten Genauigkeitsgrenzen nicht geschritten zu werden braucht.

$$\sin (W_1 + \nu) = \frac{\gamma}{e + u'_a} \dots \dots \dots 1)$$

Daraus finden sich zwei Werthe für $(W_1 + \nu)$; für jeden dieser Werthe ist die folgende Rechnung durchzuführen:

$$\operatorname{tg} \psi_1 = -\frac{e'}{e} \cdot \frac{\sin (W_1 - \nu)}{\cos (W_1 + \nu)} \dots \dots \dots 2)$$

Der Quadrant von ψ_1 bestimmt sich daraus, dass ψ_1 nahe $360^\circ - (W_1 + \nu)$ sein muss. Das Zeichen von $\cos \psi$ wird, so lange dieser Werth nicht sehr klein ist, die Entscheidung bringen, ob man es mit dem Anfange oder Ende der Finsterniss zu thun hat:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für den Anfang ist } \cos \psi \text{ negativ} \\ \text{für das Ende ist } \cos \psi \text{ positiv.} \end{array} \right\} \dots \dots \dots 3a)$$

Wird aber $\cos \psi$ sehr klein, so kann diese Regel unrichtig werden; entscheidend ist das Zeichen des Ausdruckes:

$$\left. \begin{array}{l} y = nk \cos \psi + \sin (\psi + W) \sin D \\ \log k = 0.5820, \\ \text{für den Anfang ist } y \text{ negativ} \\ \text{für das Ende ist } y \text{ positiv.} \end{array} \right\} \dots \dots \dots 3b)$$

Setzt man nun:

$$\rho = W_1 + \nu - (360^\circ - \psi_1), \dots \dots \dots 4)$$

so wird ρ stets ein sehr kleiner Winkel sein, und man hat:

$$\left. \begin{array}{l} W + \nu = W_1 + \nu + \frac{u'_a}{1 + u'_a} \rho \\ \psi = \psi_1 - \frac{u'_a}{1 + u'_a} \rho, \end{array} \right\} \dots \dots \dots 5)$$

in welcher Formel man ohne wesentliche Ungenauigkeit den Factor von ρ gleich $\frac{1}{3}$ setzen darf. Mit diesen Werthen von W und ψ findet sich:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} H &= -f_a \cos(\psi + W) - r \\ \log r &= 7.9822, \quad r = +0.009599, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 6)$$

in welchem Ausdrucke $\cos(\psi + W)$ meist der Einheit gleich gesetzt werden darf. H wird stets ein kleiner negativer Bogen sein. Die Benützung des Formelsystemes B) (p. XIII) führt dann zur Kenntniss der Orte, an denen die erste und letzte Berührung des Schattenkegels stattfindet. Der Unterschied der beiden Werthe von τ , die zum Anfange und Ende gehören, gibt in Graden die Zeitdauer der Finsterniss in wahrer Zeit.

Wollte man jene Punkte finden, an welchen die Finsterniss zuerst anfängt und zuerst aufhört vollständig gesehen zu werden, welche Punkte der inneren Berührung des Halbschattenkegels entsprechen, so hätte man zu setzen:

$$\sin(W_1 + \nu) = \frac{\gamma}{e - u'_a} \dots \dots \dots 7)$$

und ähnlich wie in den vorstehenden Formeln vorzugehen. ψ_1 wird der Gleichung 2) entsprechend bestimmt, nur ist die Wahl von ψ_1 so vorzunehmen, dass sich ψ_1 und $W_1 + \nu$ nahe zu 180° ergänzen. Dann setzt man:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= W_1 + \nu - (180^\circ - \psi_1) \\ W + \nu &= W_1 + \nu + \frac{u'_a}{1 - u'_a} \rho \\ \psi &= \psi_1 - \frac{u'_a}{1 - u'_a} \rho. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 8)$$

Die Berechnung dieser ziemlich unwichtigen Punkte kann wohl meist gespart bleiben. In allen jenen Fällen, wo der Schattenkegel über die Erde wegstreicht, wird dieses Punktepaar imaginär.

7) Bestimmung der Punkte, in welchen die nördliche und südliche Grenzcurve der partiellen Finsterniss von der westlichen und östlichen berührt wird.

Die Aufsuchung dieser vier Punkte bedarf auch einer indirecten Lösung, doch wird meist keine wiederholte Rechnung nöthig sein. Die Lösung kann für ein Punktepaar imaginär werden, was man leicht erkennt, wenn $\sin(W + \nu) > 1$ wird. Dieser Umstand findet darin seine Erklärung, dass der Halbschatten den Erdkörper nicht völlig trifft, sondern mit einem Theile nördlich oder südlich von der Erde vorbeistreift.

Berührungspunkte mit der

nördlichen Grenzcurve:

$$\sin(W_1 + \nu) = \frac{\gamma + u'_a}{e}.$$

südlichen Grenzcurve:

$$\sin(W_1 + \nu) = \frac{\gamma - u'_a}{e}.$$

Für beide Werthe der Winkel, welche dem Sinus entsprechen, ist folgende Rechnung durchzuführen:

$$\log k = 0.5820$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \psi &= -\frac{nk + \sin D \sin W_1}{\sin D \cos W_1} \\ \sin \psi &\text{ stets positiv} \\ \sin(W_2 + \nu) &= \frac{\gamma}{e} + \frac{u'_a}{e} \sin \psi. \end{aligned} \right|$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \psi &= -\frac{nk + \sin D \sin W_1}{\sin D \cos W_1} \\ \sin \psi &\text{ stets negativ} \\ \sin(W_2 + \nu) &= \frac{\gamma}{e} + \frac{u'_a}{e} \sin \psi. \end{aligned} \right\}$$

Stimmt W_2 mit W_1 nicht hinreichend überein, so muss die Rechnung wiederholt werden, da aber die gemachte Näherungsannahme $\sin \psi = \pm 1$ der Wahrheit stets sehr nahe kommt, so wird eine solche Wiederholung selten nöthig sein.

$$\begin{array}{l|l} \sin H = f_a \sin W - r & \sin H = -f_a \sin W - r \\ \log r = 7.9822; & r = +0.009599. \end{array}$$

Mit den Werthen von H , W und ψ werden die geographischen Coordinaten nach den Formeln $B)$ (p. XIII) gefunden.

$\delta)$ Bestimmung der westlichen und östlichen Grenzcurve der partiellen Finsterniss.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Entweder:} \quad \sin(W+\nu) = \frac{\gamma}{e} + \frac{u'_a}{e} \sin \psi \\ \text{oder:} \quad \sin \psi = \frac{e}{u'_a} \sin(W+\nu) - \frac{\gamma}{u'_a} \end{array} \right\} \dots \dots \dots 1)$$

Die erste der beiden Formeln wird man benützen, wenn seinem absoluten Werthe nach $\sin \psi > \sin(W+\nu)$, die zweite, wenn $\sin \psi < \sin(W+\nu)$ ist. Der Grenzwert von $\sin(W+\nu)$, bei welchem ein Wechsel der Formeln zweckmässig vorgenommen wird, findet sich durch die Relation:

$$\sin(W+\nu) = \frac{\gamma}{e \mp u'_a}.$$

Das obere Zeichen gilt, wenn man sich $\sin(W+\nu)$ mit $\sin \psi$ gleich bezeichnet vorstellt, das untere, wenn sie ungleich bezeichnet sind. Im ersteren Falle wird unter Umständen der Werth für die Grenze imaginär, es wird dann nur ein Grenzwert in Betracht kommen; sind beide Werthe reell, so werden zwei in Erwägung zu ziehen sein. Substituiert man in die erste der obigen Formeln einen beliebigen Werth von ψ oder in die zweite einen beliebigen Werth von $(W+\nu)$, so erhält man für den correspondirenden Bogen $(W+\nu)$ oder beziehungsweise ψ , da die Bestimmung durch einen Sinus erfolgt, zwei Annahmen; mit beiden ist die Rechnung weiter zu führen. Unter Umständen (der Halbschatten projicirt sich nicht ganz auf den Erdkörper) wird man für die Sinus grössere Werthe als die Einheit finden, also auf imaginäre Lösungen geführt; jene Bögen, welche diese Lösungen bedingen, sind auszuschliessen. Im Falle, dass ψ und $(W+\nu)$ die ganze Peripherie durchlaufen können, ohne Imaginäres in den Formeln 1) zu bedingen, bildet sowohl die westliche als auch die östliche Grenzcurve eine geschlossene, ovalförmige Linie. Sind aber imaginäre Lösungen vorhanden, so vereinigen sich die östliche und westliche Grenze zu einem achterförmigen Curvenzuge.

Im Allgemeinen wird ein negativer Werth von $\cos \psi$ dem Anfang der Finsterniss, ein positiver dem Ende entsprechen; ist aber $\cos \psi$ klein, so ist die Entscheidung bedingt durch das Zeichen von y in:

$$\begin{array}{l} y = nk \cos \psi + \sin(\psi + W) \sin D \\ \log k = 0.5820; \end{array}$$

negative y entsprechen dem Anfang, positive dem Ende der Finsterniss. Rechnet man den Curvenzug, so wird die regelmässig fortschreitende Rechnung auch ohne dieses Kriterium leicht die Entscheidung bringen, umso mehr, da die Berührungspunkte der westlichen und östlichen mit der südlichen und nördlichen Grenzcurve bekannt sind. Die westliche Grenzcurve verbindet die Orte, die den Beginn und das Ende der Finsterniss bei Sonnenaufgang, die östliche jene, welche diese Phasen bei Sonnenuntergang sehen.

$$\left. \begin{array}{l} \lg H = -f_a \cos(\psi + W) - r \\ \log r = 7.9822, \quad r = +0.009599. \end{array} \right\} \dots \dots \dots 2)$$

Die Ermittlung der geographischen Coordinaten geschieht nach $B)$ (p. XIII).

$\epsilon)$ Die Curve der grössten Phase im Horizont.

u' und f erhalten verschiedene Werthe je nach der Grösse der Finsterniss, die in Zollen i angegeben werden soll. Setzt man:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{6} (u'_a - 0.27365) = \Delta u \\ \frac{9.2208 f_a}{9.2208 f_a} = \Delta f, \end{array} \right\} \dots \dots \dots 1)$$

so sind die Werthe, die zu einer Phase von i Zoll gehören:

$$\left. \begin{aligned} u' &= u_a - i\Delta u \\ f &= f_a - i\Delta f. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 2)$$

Hiebei wäre zu bemerken, dass bei strenger Befolgung der vorstehenden Formeln bei ringförmigen Sonnenfinsternissen die Curve von 12 Zoll nördlich thatsächlich südlicher verläuft als die Curve von 12 Zoll südlich, und dass eben diese Curven mit einem Theile (bis zu 10.7 Zoll) den Nachbarcurven gewissermassen übereinander gelagert erscheinen. Projicirt sich der Schattenkegel nicht ganz auf die Erde, so werden für gewisse Werthe von u' die späteren Ausdrücke imaginär; dieselben sind auszuschliessen. Die folgende Rechnung ist eine indirecte, doch sind die Näherungsannahmen so genau, dass eine Wiederholung der Rechnung kaum nöthig wird.

Nördliche Curve.		Südliche Curve.
$\sin (W_1 + \nu) = \frac{\gamma + u'}{e}.$		$\sin (W_1 + \nu) = \frac{\gamma - u'}{e}.$

Für beide Bögen, die zu dem Sinus gehören, ist die folgende Rechnung auszuführen; der eine Bogen gehört zur grössten Phase im Horizont bei Sonnenuntergang, der andere zu der bei Sonnenaufgang.

$E = \sin D - f \cos D \sin N'$ $F = E + r \cos D \cos (N' - W_1)$		$E = \sin D + f \cos D \sin N'$ $F = E + r \cos D \cos (N' - W_1)$
$\log r = 7.9822$ $\log k = 0.5820;$		
$\operatorname{tg} \psi = \frac{nk + e' F \sin (W_1 - \nu)}{e F \cos (W_1 + \nu)}$ $\sin \psi$ stets positiv $\sin (W_2 + \nu) = \frac{\gamma}{e} + \frac{u'}{e} \sin \psi.$		$\operatorname{tg} \psi = \frac{nk + e' F \sin (W_1 - \nu)}{e F \cos (W_1 + \nu)}$ $\sin \psi$ stets negativ $\sin (W_2 + \nu) = \frac{\gamma}{e} + \frac{u'}{e} \sin \psi.$

$\left. \dots \dots \dots \right\} \dots 3)$

W_2 wird mit W_1 meist schon eine genügende Übereinstimmung zeigen; wäre dies nicht der Fall, so müsste die Rechnung mit dem Werthe $(W_2 + \nu)$ wiederholt werden.

$\sin H = f \sin W - r$ $\log r = 7.9822;$		$\sin H = -f \sin W - r$ $r = +0.009599.$
---	--	--

$\left. \dots \dots \dots \right\} \dots 4)$

Mit den Werthen H , W und ψ werden die geographischen Coordinaten nach den Formeln B) p. XIII gefunden.

Die Curve der grössten Phase erfährt zwischen den nördlichen und südlichen zu $i=12$ gehörenden Punkten eine Unterbrechung; natürlich gilt diese Bemerkung nur von centralen Finsternissen. Die Punkte für die Phase von 0 Zoll brauchen nicht berechnet zu werden, sie fallen mit den in γ) (p. XV) berechneten Punkten zusammen.

Streicht der Schattenkegel theilweise an der Erde vorbei, so wird sich eine der obigen Grenzcurven zu einem Punkte zusammenziehen, den ich mit dem Namen Grenzpunkt bezeichnen will; dieser Punkt ist für die bildliche Darstellung des Curvenganges der grössten Phase im Horizont von Wichtigkeit.

Man findet denselben leicht aus den folgenden Gleichungen, wobei natürlich in einem gegebenen Falle nur ein System in Anwendung kommt, und zwar:

wenn γ positiv:	wenn γ negativ:	} 5)
$W + \gamma = 90^\circ$	$W + \gamma = 270^\circ$	
$\psi = 90^\circ$	$\psi = 270^\circ$	
$u' = e - \gamma$	$u' = e + \gamma$	
$i = 6 \frac{u'_a - u'}{u'_a - 0.27365}$	$i = 6 \frac{u'_a - u'}{u'_a - 0.27365}$	
$f = f_a - i \Delta f$	$f = f_a - i \Delta f$	
$\text{tg } H = f - r$	$\text{tg } H = -f - r$	
$\log r = 7.9822;$	$r = +0.009599.$	

Mit den Werthen H , W und ψ werden die geographischen Coordinaten nach B) (p. XIII) gefunden.

Will man jene Orte kennen, für welche die völlige Centralität zur Zeit des Sonnenaufganges oder Sonnenunterganges stattfindet, so hat man:

$$\left. \begin{aligned} \sin(W + \gamma) &= \frac{\gamma}{e} \\ \text{tg } H &= -r \\ \log r &= 7.9822 \\ \cos \psi &= 0, \end{aligned} \right\} 6)$$

und rechnet mit den Werthen von H , W , ψ die geographischen Coordinaten nach B) (p. XIII). Die Ermittlung dieser Punkte mit Vernachlässigung der Abplattung und Refraction erweist sich zur Beurtheilung der Umstände einer Finsterniss hinlänglich genau. Die diesbezüglichen Formeln sind schon p. XI mitgetheilt worden.

§) Ermittlung der nördlichen und südlichen Curve einer gegebenen Grösse.

Die Rechnung ist zwar indirect, aber es lassen sich Formeln aufstellen, welche so hinreichende Annäherungen ergeben, dass man die Rechnung als direct bezeichnen kann. In diesem Abschnitte treten zunächst Formeln auf, die sich wesentlich von den Hansen'schen unterscheiden, hauptsächlich dadurch, dass anstatt des als unabhängige Variable gewählten Stundenwinkels der Sonne der Winkel I' eintritt, der wesentlich Vortheile, besonders für jene Curven, die nahe dem Pole verlaufen, darzubieten scheint. Die Rechnung wird durch diese neuen Formeln zwar etwas umständlicher, gewinnt aber an Sicherheit und Übersichtlichkeit ferner finden keine Ausnahmefälle statt. Da aber Hansen's Formeln in der überwiegenden Anzahl der Fälle sicher angewendet werden können, und denselben der Vortheil einer kürzeren Rechnung zukommt, so habe ich weiter unten auch diese ausführlich aufgenommen. Es ist hier nicht der Ort, auf die Ableitung des früher erwähnten Formelsystemes einzugehen, welches sich übrigens in meiner Abhandlung: „Über den Venusdurchgang des Jahres 1874“ (Sitzber. 28. April 1870), den dortigen Verhältnissen angepasst, angegeben und abgeleitet findet.

Die Grössen f und u' werden nach ϵ) 1) und 2) (p. XVI und XVII) ermittelt; man erhält zunächst die erforderlichen Hilfsgrössen durch die folgenden Formeln, bei denen die oberen Zeichen für die nördlichen die unteren für die südlichen Grenzcurven gelten:

$$\left. \begin{aligned} \sin g' \sin G' &= \sin g \sin G \mp f \cos \delta', & \beta &= \frac{15}{n} (1 - e) \cos k \\ \sin g' \cos G' &= \sin g \cos G, & \alpha_1 &= (1 - e) f \sin \delta' \\ \cos g' &= \cos g \pm f \sin \delta', & \log(1 - e) &= 9.9985 \\ & & \text{tg } \rho &= -\frac{\text{tg } g'}{(1 - e)}; \\ & & \text{sin } W' &= \gamma \pm u'; \\ & & \text{cos } W', \text{ aus sin } W' \text{ bestimmt, wird stets positiv genommen.} \\ & & \text{sin } C' &= \zeta \cos g', \quad \log \zeta = 8.9122 - 10; \\ & & \text{cos } C', \text{ aus sin } C' \text{ bestimmt, wird stets positiv genommen.} \end{aligned} \right\}$$

ρ stets im vierten Quadranten zu nehmen.

Hierauf bestimmt man für alle Curven gemeinsam:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \Phi &= -\frac{\cos k}{\sin \delta'}, \sin \Phi \text{ gleichbezeichnet mit } \cos k; \\ \sin \omega &= \frac{\sin \delta'}{\sin k}, \text{ daraus } \cos \omega, \text{ dem man stets das positive Vorzeichen ertheilt.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 2)$$

Nun nimmt man eine Anzahl von in passenden Intervallen (etwa 30°) gewählten Werthen eines willkürlichen Winkels I' vor, welche den Bedingungen, dass

$$\Phi - 90^\circ < I' < \Phi + 90^\circ \dots \dots \dots 3)$$

genügen. Für die Grenzwerte von I' wird die Finsterniss sehr nahe im Horizonte stattfinden, für den Mittelwerth bei der gegebenen Grösse in nahezu maximaler Höhe. Für jeden der so gewählten Werthe von I' berechnet man:

$$\left. \begin{aligned} v \sin V &= \cos \omega \cos (\Phi - I') \\ v \cos V &= \sin \gamma \cos (K - G). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 4)$$

Es beginnen nun jene Rechnungen, welche für jede einzelne Curve durchzuführen sind. Setzt man zunächst:

$$\left. \begin{aligned} \sin U' &= \zeta \cos g', & \log \zeta &= 8.9122 - 10 \\ e &= \cos U', \\ \cos \rho &= \frac{1-e}{e} \cos g', & \log (1-e) &= 9.9985 - 10 \\ \sin \rho &= \frac{1}{e} \sin g' \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{nk + v \sin k \sin (W' - V)}{\sin g' \sin I' \cos W'} \\ \log k &= 0.5820, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 5)$$

und bestimmt für jeden Punkt in jeder Curve φ_1 und t nach den folgenden Formeln:

$$\left. \begin{aligned} b \sin B &= \cos W \cos I' \\ b \cos B &= \sin W \\ \sin \varphi_1 &= b \cos (\rho - B) \\ \cos \varphi_1 \sin (G' + t) &= b \sin (\rho - B) \\ \cos \varphi_1 \cos (G' + t) &= \cos W \sin I', \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 6)$$

so rechnet man mit den derart in unzweideutiger Weise erhaltenen Werthen von t und φ_1 weiter:

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= f \cos \delta' \cos t \\ u &= u' - \alpha_1 \sin \varphi_1 - \beta_1 \cos \varphi_1 \\ \tau &= \mu + \beta \sin \varphi_1 - \frac{15}{n} \sin k \cos (K + t) \cos \varphi_1 + \frac{15}{n} u \cos \psi \\ \lambda &= t - \tau \\ \varphi &= \varphi_1 + (\varphi - \varphi_1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 7)$$

$(\varphi - \varphi_1)$ mit dem Argumente φ_1 aus der Hilfstafel I., p. XIV.

Will man Hansen's Formeln benutzen, die im allgemeinen bequemer sind, besonders, wenn man nur eine Curve berechnen will, so hat man in der folgenden Weise vorzugehen.

Die Rechnung ist indirect; die Grössen f und u' werden nach ϵ) 1) und 2) (p. XVI und XVII) ermittelt. Man erhält für jeden Werth von i zunächst die folgenden Hilfsgrössen, wobei die oberen Zeichen für die nördlichen, die unteren für die südlichen Grenzcurven gelten:

$$\left. \begin{aligned} \sin g' \sin G' &= \sin g \sin G \mp f \cos \delta', & \alpha &= (1-c) \cos g' \\ \sin g' \cos G' &= \sin g \cos G, & \beta &= \frac{15}{n} (1-c) \cos k \\ \cos g' &= \cos g \pm f \sin \delta', & \alpha_1 &= (1-c) f \sin \delta' \\ & & \log (1-c) &= 9.9985. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 1)$$

Die bei den weiter unten folgenden Formeln erforderlichen Hilfsgrößen k und K sind allen Curven gemeinsam und bereits bei der Rechnung der Elemente bestimmt.

Die Rechnung dieser Curven wird sich verschieden gestalten; man wird zwei Fälle zu unterscheiden haben, je nachdem $\gamma \pm u'$ seinem absoluten Werthe nach kleiner oder grösser ist als α . In dieser Gleichung ist für u' das obere Zeichen zu nehmen, wenn man die nördliche, das untere, wenn man die südliche Curve berechnen will. Bei den unten folgenden Rechnungen wird der Zeichenunterschied durch die Formeln selbst (Multiplication mit $\sin \psi$) eingeführt. Der zweite Fall hat für Finsternisse, deren nördliche und südliche Grenzcurven gleichzeitig reell sind, keine Bedeutung.

Erster Fall: $(\gamma \pm u')$ absolut $< \alpha$.

Für jede Curve der angegebenen Verfinsterungsgrösse rechnet man für eine passende Anzahl von Stundenwinkeln die unten angesetzten Formelsysteme durch. Hierbei sind die Stundenwinkel des westlichen Zweiges der Curve der grössten Phase (grösste Phase bei Sonnenaufgang) als untere Grenze zu betrachten, von der man durch 360° aufsteigend zur oberen Grenze, welche die Stundenwinkel der grössten Phase bei Sonnenuntergang für die gegebene Verfinsterungsgrösse darstellt, gelangt; innerhalb dieser Grenzen kann der Stundenwinkel jeden beliebigen Werth annehmen.

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \sin g' \sin (G' + t), & \Theta &= \sin k \sin (K + t) \\ \eta_1 &= \sin g' \cos (G' + t), & \Theta_1 &= \frac{15}{n} \sin k \cos (K + t). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 2)$$

Die Grössen Θ und Θ_1 sind bei allen Curven für denselben Stundenwinkel identisch.

$$a \sin A = \eta$$

$$a \cos A = \alpha;$$

a wird stets positiv angenommen.

Nun beginnt die indirecte Rechnung.¹

$$\sin (\varphi'_1 - A) = \frac{\gamma \pm u'}{a}$$

Das obere Zeichen für die nördlichen Curven,
das untere Zeichen für die südlichen Curven.

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{nk - \Theta \cos \varphi'_1}{\eta_1 \cos \varphi'_1}$$

$$\log k = 0.5820$$

$\sin \psi$ wird für nördliche Curven positiv,

$\sin \psi$ wird für südliche Curven negativ.

¹ Der Bogen $(\varphi'_1 - A)$ ist so zu bestimmen, dass dem Zeichen des Sinus entsprochen wird. Es ergeben sich aber hierbei zwei Bögen. Wenn von diesen nur einer brauchbar ist, so ist es derjenige, für welchen $\cos (\varphi'_1 - A)$ mit $\sin (K + t)$ gleich bezeichnet ist. Es können aber unter Umständen beide Bögen brauchbaren Punkten angehören. Entscheidend ist die Regel, dass nur ein solcher Werth von φ_1 brauchbar sein kann, für welchen der Ausdruck $\cos \delta' \cos \varphi_1 \cos t + \sin \delta' (1-c) \sin \varphi_1$

Mit dem Werthe von ψ rechnet man:

$$\sin(\varphi_1 - A) = \frac{\gamma + u' \sin \psi}{u}, \quad \dots \dots \dots 4)$$

wodurch meist ein ausreichend genauer Werth von φ_1 gefunden ist. Sollte man eine weitere Verbesserung für wünschenswerth halten, so wird die Rechnung nach den Formeln 3) mit Ausschluss der ersten Formel einen verbesserten Werth von ψ abgeben, der in 4) eine neue Annäherung gibt; dieses Verfahren ist fortzusetzen, bis die genügende Übereinstimmung zwischen dem Anfang- und Endwerthe hergestellt ist, doch wird, wie schon gesagt, eine derartige Wiederholung meist nicht nöthig; auch kann, wenn man eine Reihe von Curvenpunkten rechnet, durch die Differenzwerthe ein sehr nahe richtiger Schluss auf den folgenden Werth von ψ gemacht werden.

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= f \cos \delta' \cos t \\ u &= u' - \alpha_1 \sin \varphi_1 - \beta_1 \cos \varphi_1 \\ \tau &= \mu + \beta \sin \varphi_1 - \Theta_1 \cos \varphi_1 + \frac{15}{n} u \cos \psi \\ \lambda &= t - \tau \\ \varphi &= \varphi_1 + (\varphi - \varphi_1) \\ (\varphi - \varphi_1) &\text{ mit dem Argument } \varphi_1 \text{ aus der Hilfstafel I, p. XIV.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 5)$$

Zweiter Fall: $(\gamma \pm u')$ absolut $> \alpha$.

In diesem Falle geben die für die grösste Phase im Horizont geltenden Stundenwinkel keine sicheren Grenzwerte, indem für die Zone der Sichtbarkeit sowohl grössere als auch kleinere Stundenwinkel gelten, als dies durch diese Grenzen angedeutet wird. Für die Stundenwinkel, die zwischen den Grenzen liegen, welche die grösste Phase im Horizont gibt, wird man das für den ersten Fall gegebene Verfahren anwenden, nun aber die Stundenwinkel so wählen, dass man von der unteren Grenze (Stundenwinkel der grössten Phase bei Sonnenaufgang) absteigend zur oberen Grenze (Stundenwinkel der grössten Phase bei Sonnenuntergang) gelangt. Die Rechnung der Punkte der grössten Phase im Horizont und die oben durchgeführte Rechnung wird für die betreffenden Punkte auf der Erdoberfläche gewisse geographische Breiten finden lassen. Um den fehlenden Verlauf der Curve zu berechnen, wird man für die Zwischenwerthe der diese Lücken umgrenzenden geographischen Breiten passende Annahmen machen und nach folgenden Formeln rechnen:

$$\sin(G' + t) = \frac{\alpha}{\sin g'} \operatorname{tg} \varphi_1 - \left(\frac{\gamma}{\sin g'} + \frac{u'}{\sin g'} \sin \psi \right) \sec \varphi_1, \quad \dots \dots \dots 6)$$

wobei man wieder für die nördliche Grenzcurve in der ersten Annäherung $\sin \psi = +1$, für die südliche $\sin \psi = -1$ setzt.

Man erhält zwei Werthe für den Stundenwinkel, beide sind in Rechnung zu ziehen, falls nicht einer derselben schon in das durch die früheren Rechnungen ermittelte Gebiet der Stundenwinkel fällt.

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= \sin k \sin(K + t) \\ \eta_1 &= \sin g' \cos(G' + t) \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{nk - \Theta \cos \varphi_1}{\eta_1 \cos \varphi_1} \\ \log k &= 0.5820 \\ \sin \psi &\text{ positiv für die nördlichen Curven,} \\ &\text{sin } \psi \text{ negativ für die südlichen Curven.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 7)$$

positiv wird. Unter Umständen können aber für φ_1 Werthe zum Vorschein kommen, die grösser sind als $\pm 90^\circ$. Man hat dann diese Bögen in den folgenden Formeln beizubehalten und erst am Schlusse der Rechnung, um auf die gewöhnliche Zählung der geographischen Coordinaten überzugehen, die gefundene Länge um $\pm 180^\circ$ zu ändern und anstatt φ_1 die Ergänzung von φ_1 zu $\pm 180^\circ$ anzunehmen. Siehe hierüber auch „Beitrag zur Hansen'schen Theorie der Sonnenfinsternisse“ von Dr. Robert Schram (Sitzber. der kais. Akad. d. Wiss. in Wien, Bd. XCII, II. Abth. Decemberheft 1885), wo sich auch Tafeln für die jedesmaligen Grenzen, innerhalb deren φ_1 zu nehmen ist, vorfinden.

Mit ψ berechnet man den Werth $\sin (G'+t)$ nochmals und erhält hiedurch meist eine ausreichende Näherung; man kann eventuell dieses Verfahren wiederholen. Aus φ_1 erhält man φ auf die bekannte Weise mittelst der Hilfstafel I, p. XIV.

$$\left. \begin{aligned} u &= u' - \alpha_1 \sin \varphi_1 - f \cos \delta' \cos t \cos \varphi_1 \\ \tau &= \mu + \beta \sin \varphi_1 - \frac{15}{n} \sin k \cos (K+t) \cos \varphi_1 + \frac{15}{n} u \cos \psi \\ \lambda &= t - \tau. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 8)$$

n) Curve der Centralität.

Hat man die nördliche und südliche Grenzcurve für die Phase von 12 Zoll gerechnet, so bedarf man kaum noch der Bestimmung der Linie der Centralität, indem die zu demselben Stundenwinkel gehörenden Werthe von λ und φ in diesen beiden Grenzcurven zum Mittel vereinigt, die entsprechenden Punkte geben. Soll aber die Curve der Centralität direct gerechnet werden, so wird man zunächst die Hilfsgrößen:

$$\left. \begin{aligned} \pi &= \frac{\sin g}{(1-c) \cos g}, & \sigma &= -\frac{15(1-c)}{n} \cos k, & \log 15(1-c) &= 1.1746 \\ & & & & \log 15 &= 1.1761 \\ \rho &= \frac{\gamma}{(1-c) \cos g}, & \omega &= \frac{15}{n} \sin k, & \log \frac{1}{1-c} &= 0.0015 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 1)$$

bestimmen und hierauf für verschiedene passend gewählte Stundenwinkel t die folgenden Formeln 2) durchrechnen; bei der Wahl der Stundenwinkel wird man darauf Rücksicht zu nehmen haben, dass man die Rechnung nicht für Punkte führt, für die sich die Centralität unter dem Horizonte zeigen würde, wobei die drei Hauptpunkte der Centralität als gute Leitung dienen werden.¹

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} A &= \pi \sin (G'+t); & \cos A & \text{ stets positiv.} \\ \sin (\varphi_1 - A) &= \rho \cos A \\ \varphi &= \varphi_1 + (\varphi - \varphi_1) \\ (\varphi - \varphi_1) & \text{ aus Hilfstafel I, p. XIV.} \\ \tau &= \mu - \sigma \sin \varphi_1 - \omega \cos (K+t) \cos \varphi_1 \\ \lambda &= t - \tau. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 2)$$

Ist $\pm \gamma > \alpha$, so wird man ähnlich wie im Capitel ζ) für gewisse Theile der Curve nicht t , sondern φ_1 als Argument wählen und rechnen:

$$\left. \begin{aligned} \sin (G'+t) &= \frac{\alpha}{\sin g} \operatorname{tg} \varphi_1 - \frac{\gamma}{\sin g} \sec \varphi_1, \\ \text{woraus zwei Werthe für } t & \text{ resultiren; } \tau \text{ berechnet man hierauf nach:} \\ \tau &= \mu - \sigma \sin \varphi_1 - \omega \cos (K+t) \cos \varphi_1 \\ \lambda &= t - \tau. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 3)$$

Es kann auch von Interesse sein, die Dauer der Totalität oder Ringförmigkeit τ' zu bestimmen; man erhält dieselbe mit hinreichender Näherung in Zeitminuten für einen bestimmten Stundenwinkel für die Centralität mit Benützung der bereits ermittelten Zahlen:

$$\left. \begin{aligned} u &= u' - (1-c)f_i \sin \delta' \sin \varphi_1 - f_i \cos \delta' \cos \varphi_1 \cos t \\ \log (1-c) &= 9.9985 \\ \tau' &= \frac{k'u}{nk - \cos \varphi_1 \sin k \sin (K+t)} \\ \log k' &= 2.6612 \\ \log k &= 0.5820. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 4)$$

¹ Über die Wahl des Bogens $(\varphi_1 - A)$ vergl. Anmerkung p. XX und XXI.

Ist u positiv, so ist die Finsterniss total, ist u negativ, ringförmig; dementsprechend wird τ' , positiv gefunden, die Dauer der Totalität, negativ, jene der Ringförmigkeit angeben. Für Finsternisse, die theilweise ringförmig sind, hat die Kenntniss des Punktes Interesse, wo die Ringförmigkeit in die Totalität übergeht; man wird leicht jenen Werth durch Rechnung einiger passend gewählter Stundenwinkel finden, für die $u=0$ wird.

c) Grenzcurven der Totalität und Ringförmigkeit.

Wenn auch die Berechnung der Grenzcurven der Totalität und Ringförmigkeit aus den Formeln für die Bestimmung der nördlichen und südlichen Curve von 12 Zoll (vergl. Capitel ξ) (p. XVIII ff.) resultirt, so dürfte es doch passend sein, für diesen Specialfall directe Formeln zusammenzutragen und dabei zulässige Abkürzungen einzuführen. Man setzt:

$$\begin{aligned} \rho' &= -f_i \cos \delta', & \omega &= \frac{15}{n} \sin k \\ \sigma &= -\frac{15}{n} (1-c) \cos k, & \log 15 (1-c) &= 1.1746. \end{aligned}$$

Für die folgende Rechnung hat man zwei Fälle, welche Trennung nachstehend durchgeführt ist, um die Grenzcurven entsprechend ihrer Bezeichnung finden zu lassen [vergl. Bemerkung im Capitel ξ) p. XXI].

Nördliche Grenze der Totalität, südliche Grenze der Ringförmigkeit.	Südliche Grenze der Totalität, nördliche Grenze der Ringförmigkeit.
$\pi' = (1-c) \{ \cos g + f_i \sin \delta' \}$	$\pi' = (1-c) \{ \cos g - f_i \sin \delta' \}$
$\log (1-c) = 9.9985$	$\log (1-c) = 9.9985$
$a \sin A = \sin g \sin (G+t) + \rho' \cos t$	$a \sin A = \sin g \sin (G+t) - \rho' \cos t$
$a \cos A = \pi'$	$a \cos A = \pi'$
a stets positiv	a stets positiv
$\sin (\varphi_1 - A) = \frac{\gamma + u'_i}{a}$	$\sin (\varphi_1 - A) = \frac{\gamma - u'_i}{a}$
$\tau = \mu - \sigma \sin \varphi_1 - \omega \cos (K+t) \cos \varphi_1$	
$\lambda = t - \tau$	
$\varphi = \varphi_1 + (\varphi - \varphi_1)$	

$(\varphi - \varphi_1)$ mit dem Argumente φ_1 aus der Hilfstafel I, p. XIV.

x) Bestimmung der westlichen und östlichen Grenzcurven der inneren Ränderberührung.

Diese Curven bilden, sehr seltene Fälle ausgenommen, kleine ovalförmige Ringe. Man rechnet:

$$\left. \begin{aligned} \text{entweder:} & \quad \sin (W+\nu) = \frac{\gamma}{e} + \frac{u'_i}{e} \sin \psi, \\ \text{oder:} & \quad \sin \psi = \frac{e}{u'_i} \sin (W+\nu) - \frac{\gamma}{u'_i}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 1)$$

Die erste Formel wird man benützen, wenn seinem absoluten Werthe nach $\sin \psi > \sin (W+\nu)$ wird, die zweite, wenn $\sin \psi < \sin (W+\nu)$; bei der Kleinheit von u'_i wird meist, wenn $\frac{\gamma}{e}$ nicht zufällig sehr nahe der Einheit kommt, die erste Formel allein zur Anwendung gelangen. ψ wird mit den seltensten Ausnahmen die ganze Peripherie durchlaufen können, $\sin (W+\nu)$ aber in Folge der Kleinheit von u'_i sehr beschränkt sein. Man wird für passend gewählte Intervalle die Werthe von $\sin (W+\nu)$ leicht berechnen; beide zu diesen Sinus gehörenden Bögen haben Giltigkeit und sind der weiteren Rechnung zu Grunde zu legen:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} H &= -f_i \cos (\psi + W) - r \\ \log r &= 7.9822, \quad r = +0.009599. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 2)$$

Mit den Werthen von ψ , H , W , werden die geographischen Coordinaten nach den Formeln B) p. XIII ermittelt. Die Berührungspunkte der Curve der grössten Phase im Horizont trennen jene Abschnitte der Curve, welche den Anfang und das Ende der Finsterniss bezeichnen.

II. Bestimmung der Hauptumstände einer Sonnenfinsterniss für einen gegebenen Ort.

λ = östliche Länge des Ortes von Greenwich in Graden und Decimaltheilen des Grades (westliche Längen negativ gezählt).

φ = geographische Breite.

Mittelst der Hilfstafel I, p. XIV bildet man für den Ort die excentrische Polhöhe φ_1 (φ_1 ist dem absoluten Werthe nach stets kleiner als φ) und berechnet:

$$\xi = \cos \varphi_1, \quad \eta = (1-e) \sin \varphi_1, \quad \log(1-e) = 9.9985.$$

A) Zeit und Grösse der grössten Phase.

$$L = \lambda + \mu + \frac{15}{n} \eta \cos k$$

$$K' = K + L$$

$$a = -\frac{15}{n} \xi \sin k$$

$$\operatorname{tg} \tau' = \frac{a \cos K'}{l + a \sin K'}.$$

l ist mit dem Argumente τ aus der folgenden Tafel II zu entnehmen; die Rechnung ist daher eine indirecte. Man setzt beim ersten Versuche $\log l = 1.7581$, erhält hieraus einen genäherten Werth von τ' , der zur Entnahme eines genaueren Werthes von l benutzt wird. Die Rechnung ist zu wiederholen, bis keine Änderung in den Zahlen auftritt; es wird selten nöthig sein, über die zweite Näherung hinauszugehen.

Hilfstafel II.

τ'	$\log l$	τ'	$\log l$	τ'	$\log l$
0°	1.7581 0	10°	1.7603 +5	20°	1.7670 +9
1	1.7581 +1	11	1.7603 +5	21	1.7679 +9
2	1.7582 +1	12	1.7613 +6	22	1.7688 +10
3	1.7583 +2	13	1.7619 +6	23	1.7698 +10
4	1.7585 +2	14	1.7625 +6	24	1.7709 +11
5	1.7587 +2	15	1.7631 +7	25	1.7720 +11
6	1.7589 +3	16	1.7638 +7	26	1.7731 +12
7	1.7592 +3	17	1.7645 +8	27	1.7743 +12
8	1.7595 +4	18	1.7653 +8	28	1.7755 +13
9	1.7599 +4	19	1.7661 +9	29	1.7768 +13
10	1.7603 +4	20	1.7670 +9	30	1.7781 +13

Ist der wahre Werth von τ' ermittelt, so findet man weiter:

$$t_0 = \tau' + L$$

$$\log z = 9.4180$$

$$m' \sin M' = -z \xi \sin g \cos (G + t_0)$$

$$m' \cos M' = n - z \xi \sin k \sin (K + t_0)$$

$$t = t_0 + \frac{15}{m'} \sin M' \{ \gamma - \eta \cos g + \xi \sin g \sin (G + t_0) \}$$

$$\tau = t - \lambda.$$

Der Werth t ist für den vorgelegten Ort der Stundenwinkel der Sonne für die Zeit der grössten Phase, τ der Stundenwinkel der Sonne unter dem Meridian von Greenwich für diesen Zeitpunkt; beide können in Zeit verwandelt werden nach Tafel V, pag. XXX.

Die grösste Phase ist für den gegebenen Ort sichtbar (über dem Horizont), sobald der Ausdruck $\sin \delta' \sin \varphi + \cos \delta' \cos \varphi \cos t$ innerhalb der Grenzen -0.01 und $+1.00$ liegt.

$$\pm m = \frac{\gamma - \eta \cos g + \xi \sin g \sin (G+t)}{\cos M'}$$

Das obere Vorzeichen gilt, wenn der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen positiv ist, in welchem Falle der nördliche Theil der Sonnenscheibe verfinstert wird, das untere, wenn er negativ ist, in welchem Falle der südliche Theil der Sonnenscheibe verfinstert wird; m ist also stets positiv zu nehmen. Die Grösse der Phase selbst findet sich daraus:

$$\text{Grösste Phase in Zollen} = 6 \frac{u'_a - m}{u'_a - 0.27365}$$

Ist $m > u'_a$, so findet keine Finsterniss für den gegebenen Ort statt. Die Bestimmung der Grösse der grössten Phase kann aber auch leicht mit der folgenden Tafel III mit hinreichender Annäherung vorgenommen werden; das verticale Argument dieser Tafel ist m , das horizontale u'_a .

Die vorstehenden Formeln sind für die Rechnung wesentlich bequemer als die entsprechenden Hansen'schen, bei denen oft eine drei- bis viermalige Durchrechnung erforderlich ist, um den richtigen Werth von t zu finden. Es wird sich daher stets empfehlen, die vorstehend mitgetheilten Formeln zu benutzen, bei denen die eingeführten Abkürzungen nirgends die zulässigen Grenzen überschreiten. Nichtsdestoweniger sollen nachfolgend auch die strengen Hansen'schen Formeln angeführt werden.

t_0 sei ein Näherungswerth des Stundenwinkels der Sonne zur Zeit der grössten Phase, ausgedrückt in Graden und Decimaltheilen des Grades. Ist aber kein Näherungswerth bekannt, so setze man in erster Näherung: $t_0 = \lambda + \mu$ (hierbei wird das erste Glied in $m \cos M$ der Null gleich)

$$m \sin M = \gamma - \eta \cos g + \xi \sin g \sin (G+t)$$

$$m \cos M = (t_0 - \lambda - \mu) \frac{n}{15} - \eta \cos k + \xi \sin k \sin (K+t)$$

$$m' \sin M' = -\alpha \xi \sin g \cos (G+t_0)$$

$$m' \cos M' = n - \alpha \xi \sin k \sin (K+t_0)$$

$$t_1 = t_0 - 15 \frac{m}{m'} \cos (M + M')$$

$$\log \alpha = 9.4180$$

$$\log 15 = 1.1761$$

$$\tau = t_0 - \lambda$$

m und m' stets positiv zu wählen und der Bogen $t_0 - \lambda + \mu$ immer kleiner als $\pm 50^\circ$.

t_0 ist der verbesserte Werth des angenommenen Stundenwinkels, der als Grundlage für eine weitere Annäherung dient, indem man den so gefundenen Werth von t_1 statt t_0 in die obigen Formeln einführt. Die Rechnung ist so lange zu wiederholen, bis der Anfangswerth t_0 mit dem Endwerthe t_1 genügend übereinstimmt. Der Werth von m in der letzten Näherung dient nach der oben gegebenen Formel oder nach der folgenden Tafel III zur Bestimmung der Grösse der grössten Phase in Zollen.

Ist $(M + M')$ im letzten Versuche nahe an 90° , so wird der nördliche Theil der Sonnenscheibe verfinstert sein.

Ist $(M + M')$ im letzten Versuche nahe an 270° , so wird der südliche Theil der Sonnenscheibe verfinstert sein.

Im ersten Falle liegt der vorgelegte Ort auf einer südlichen, im zweiten auf einer nördlichen Grenzcurve.

Will man die Grösse der Phase für einen vorher gegebenen Stundenwinkel \mathcal{S} kennen, wie es z. B. bei der Frage nach der Grösse der Phase für Sonnenaufgang oder Sonnenuntergang der Fall ist, so berechnet man:

$$m \sin M = \gamma - \eta \cos g + \xi \sin g \sin (G + \mathcal{S})$$

$$m \cos M = (\mathcal{S} - \lambda - \mu) \frac{n}{15} - \eta \cos k + \xi \sin k \cos (K + \mathcal{S}).$$

Hiebei hat man, wenn nöthig, durch Subtraction von 360° zu beachten, dass der Winkel $\mathcal{S} - \lambda - \mu$ stets innerhalb der Grenzen -50° und $+50^\circ$ eingeschlossen ist, was immer erreicht werden kann, wenn die Finsterniss für den vorgelegten Ort möglich ist. Der stets positiv zu nehmende Werth von m gibt mit Hilfe der Tafel III oder mittelst des Ausdruckes:

$$6 \frac{u'_a - m}{u'_a - 0.27365}$$

die Grösse der Phase für den gegebenen Stundenwinkel in Zellen.

B) Anfang und Ende der Finsterniss.

Den Stundenwinkel der Sonne für Anfang und Ende der Finsterniss rechnet man am bequemsten nach der folgenden von Dr. Robert Schram herrührenden Transformation der von Hansen hiefür gegebenen Formeln.

Es sei \mathcal{S} ein beliebiger Näherungswerth, am besten der Stundenwinkel für die Zeit der grössten Phase. In diesem letzteren Falle ist schon durch die vorhergehenden Rechnungen m' eventuell auch m und M gegeben; ist aber keine Näherung bekannt, so setzt man $\mathcal{S} = \lambda + \mu$. Man hat dann:

$$\left. \begin{aligned} G + \mathcal{S} &= G'' & K + \mathcal{S} &= K'' \\ m \sin M &= \gamma - \eta \cos g + \xi \sin g \sin G'' \\ m \cos M &= (\mathcal{S} - \lambda - \mu) \frac{n}{15} - \eta \cos k + \xi \sin k \cos K'' \\ m &\text{ stets positiv} \\ u_2 &= u'_a - f_a \eta \sin \delta'. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 1)$$

Bezeichnet man mit d die Correction, die man an \mathcal{S} anzubringen hat, um den Stundenwinkel t der Sonne zur Zeit des Anfanges oder des Endes der Finsterniss zu erhalten, so wird man, falls \mathcal{S} mit dem Stundenwinkel der grössten Phase identisch und m' aus der diesbezüglichen Rechnung bekannt ist, in erster Näherung $d_a = -\frac{15}{m'} \sqrt{u_2'^2 - m'^2}$ und $d_e = +\frac{15}{m'} \sqrt{u_2'^2 - m'^2}$ setzen; ist aber kein genäherter Werth bekannt, so wird man in erster Näherung $d = 0$ annehmen. Man hat weiter:

Anfang	Ende
$m'' \sin M''_a = +x'' \xi \sin g \cos \left(G'' + \frac{d_a}{2} \right)$	$m'' \sin M''_e = +x'' \xi \sin g \cos \left(G'' + \frac{d_e}{2} \right)$
$m'' \cos M''_a = \frac{n}{15} + x'' \xi \sin k \sin \left(K'' + \frac{d_a}{2} \right)$	$m'' \cos M''_e = \frac{n}{15} + x'' \xi \sin k \sin \left(K'' + \frac{d_e}{2} \right)$
m'' stets positiv	m'' stets positiv
x'' mit Argument $\pm d_a$ aus Tafel IV	x'' mit Argument $\pm d_e$ aus Tafel IV
$u = u_2 - \xi f_a \cos \delta' \cos (\mathcal{S} + d_a)$	$u = u_2 - \xi f_a \cos \delta' \cos (\mathcal{S} + d_e)$
$\sin \chi'_a = \frac{m}{u} \sin (M + M''_a)$	$\sin \chi'_e = \frac{m}{u} \sin (M + M''_e)$
$\cos \chi'_a$ stets negativ	$\cos \chi'_e$ stets positiv
$d_a = \frac{u}{m''} \cos \chi'_a - \frac{m}{m''} \cos (M + M''_a)$	$d_e = \frac{u}{m''} \cos \chi'_e - \frac{m}{m''} \cos (M + M''_e)$
$t_a = \mathcal{S} + d_a$	$t_e = \mathcal{S} + d_e$
$\tau = t_a - \lambda$	$\tau = t_e - \lambda$

. 2)

Die Näherungen müssen für Eintritt und Austritt gesondert berechnet werden. Wird $\sin \chi'$ in der ersten und zweiten Näherung grösser als die Einheit, so setze man $\cos \chi' = 0$, bleibt aber $\sin \chi' > 1$ auch bei der letzten Annäherung, so findet keine Finsterniss für den gegebenen Ort statt.

d wird also ein Näherungswert sein, der in die Formeln 2) eingesetzt, eine neue Annäherung ergibt; dieses Verfahren ist so lange fortzusetzen, bis der neue Werth von d mit dem früher erlangten genügend stimmt. Die Phase ist sichtbar, wenn

$$\sin \delta' \sin \varphi + \cos \delta' \cos \varphi \cos t$$

innerhalb der Grenzen -0.01 und $+1.00$ liegt. Der Positionswinkel des Eintrittes Θ_u und des Austrittes Θ_a für directes Bild (vom Nordpunkt des Sonnenrandes nach Ost gezählt) findet sich nach:

$$\Theta_u = N' + M'' - \chi'_u, \quad \Theta_a = N' + M'' - \chi'_a \dots \dots \dots 3)$$

Hiebei ist M'' , M'' , χ'_u und χ'_a der letzten Annäherung zu entnehmen. Will man den Positionswinkel statt vom Nordpunkt der Sonne, von dem durch die Sonne gehenden Verticalkreise an, ebenfalls für directes Bild nach Ost gezählt erhalten, so rechnet man:

$$\operatorname{tg} K_u = \frac{\sin t_u}{\cos \delta' \operatorname{tg} \varphi - \sin \delta' \cos t_u}, \quad \operatorname{tg} K_a = \frac{\sin t_a}{\cos \delta' \operatorname{tg} \varphi - \sin \delta' \cos t_a}$$

$\sin K$ mit $\sin t$ gleichbezeichnet,

dann ist der Positionswinkel für Anfang und Ende

$$\Theta'_u = \Theta_u - K_u, \quad \Theta'_a = \Theta_a - K_a.$$

Zur Ermittlung der Hauptumstände der totalen und ringförmigen Finsternisse für einen gegebenen Ort kann man sich der vorangehenden Formeln bedienen, nur hat man überall statt u'_a und f_a die entsprechenden Werthe u'_i und f_i einzusetzen; in der ersten Näherung wird man für S immer jenen Werth wählen, welcher nach A) p. XXIV und XXV für die Zeit der grössten Phase gilt; die Grössen u'_i und f_i bestimmt man nach:

$$u'_i = 0.5473 - u'_a, \quad \log f_i = 9.9978 + \log f_a.$$

Tafel IV.

$\pm d$	$\log x''$	$\pm d$	$\log x''$	$\pm d$	$\log x''$	$\pm d$	$\log x''$	$\pm d$	$\log x''$
0°	8 _n 2419	10°	8 _n 2413	20°	8 _n 2397	30°	8 _n 2369	40°	8 _n 2330
1	8 _n 2419	11	8 _n 2412	21	8 _n 2394	31	8 _n 2366	41	8 _n 2326
2	8 _n 2419	12	8 _n 2411	22	8 _n 2392	32	8 _n 2362	42	8 _n 2321
3	8 _n 2418	13	8 _n 2409	23	8 _n 2390	33	8 _n 2359	43	8 _n 2316
4	8 _n 2418	14	8 _n 2408	24	8 _n 2387	34	8 _n 2355	44	8 _n 2312
5	8 _n 2417	15	8 _n 2406	25	8 _n 2384	35	8 _n 2351	45	8 _n 2307
6	8 _n 2417	16	8 _n 2405	26	8 _n 2381	36	8 _n 2347	46	8 _n 2302
7	8 _n 2416	17	8 _n 2403	27	8 _n 2379	37	8 _n 2343	47	8 _n 2296
8	8 _n 2415	18	8 _n 2401	28	8 _n 2375	38	8 _n 2339	48	8 _n 2291
9	8 _n 2414	19	8 _n 2399	29	8 _n 2372	39	8 _n 2335	49	8 _n 2286
10	8 _n 2413	20	8 _n 2397	30	8 _n 2369	40	8 _n 2330	50	8 _n 2280

In sämtlichen auf die Sonnenfinsternisse bezüglichen Formeln bezeichnet immer:

t den Stundenwinkel der wahren Sonne am bezüglichen Erdorte,

τ " " " " " unter dem Meridian von Greenwich.

Fügt man zu diesen Grössen die im Canon unter den Elementen gegebene mit Z bezeichnete Zeitgleichung hinzu, so erhält man den entsprechenden Stundenwinkel der mittleren Sonne. Um Stundenwinkel in Zeit zu verwandeln kann man sich der folgenden Tafel V bedienen. Geht man in diese Tafel ein:

mit dem Stundenwinkel t erhält man wahre bürgerliche Ortszeit,

" " " $t+Z$ " " mittlere " "
 " " " τ " " wahre " Greenwicher Zeit,
 " " " $\tau+Z$ " " mittlere " " also Weltzeit.

Diese Tafel schliesst sich somit den Zahlen der Tafeln zur Berechnung der Mondesfinsternisse an.

Die auffällig grossen Werthe der Reduction für von der Gegenwart entfernte Epochen erklären sich aus dem Umstande, dass in den Tafeln zur Berechnung der Mondesfinsternisse die Zeitgleichung mit dem Argumente „mittlere Anomalie der Sonne“ tabulirt wurde und der erstrebten Annäherung entsprechend, nur das von der ersten Potenz der Zeit abhängige Glied Berücksichtigung fand.

Es schien daher, um die hier gemachte Rückreduction möglichst richtig auszuführen, entsprechend, jene aus den Tafeln sich ergebenden Werthe zu benutzen und in die vorstehende Tafel aufzunehmen.

Es scheint auch hier der Platz zu sein, aufmerksam zu machen, dass die auf p. [50] meiner Syzygientafeln angegebenen numerischen Werthe für σ_p und σ_t sich auf die Annahme gründen, dass man bei Berechnung der Mondfinsternisse ohne Nachtheil, wie dies auch in der That der Fall ist, die Sonnenparallaxe gegen die Mondparallaxe vernachlässigen kann. Wollte man dieselbe mit in Rechnung ziehen, so hätte man anzuwenden:

$$\sigma_p = 1.5708 - u'_a$$

$$\sigma_t = 1.0235 - u'_a$$

statt jener in den Syzygientafeln angeführten Werthe:

$$\sigma_p = 1.5682 - u'_a$$

$$\sigma_t = 1.0222 - u'_a$$

welch' letztere Werthe bei den vorliegenden Rechnungen durchaus in Anwendung gekommen sind.

Infolge der Abzählung der Gattung der Finsternisse des Canons findet man, dass in einem julianischen Jahrhundert durchschnittlich 154.3 Mondfinsternisse stattfinden, von denen etwa 71.6 total, 82.7 partiell sind.

Die Columnen des Canons sind:

1. Columnne enthält unter der Überschrift Nr. die fortlaufende Nummer der Finsternisse.
2. Columnne gibt das Datum der Finsterniss nach Weltzeit angesetzt und zwar bis zur Finsterniss Nr. 4307 inclusive nach dem julianischen Kalender, von da ab nach dem gregorianischen Kalender.
3. Columnne gibt den zum Datum gehörigen Tag der julianischen Periode und wurde hauptsächlich desshalb angesetzt, um mittelst dieser Zahl auf etwaige andere Kalenderzählungen mit Hilfe der Schram'schen Tafeln (Hilfstafeln für Chronologie im XLV. Bande der Denkschriften der math.-naturw. Classe der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien) in bequemer Weise übergehen zu können. Ein weiterer, allerdings nicht wesentlicher Vortheil der Angabe der zum Datum gehörigen julianischen Tage besteht darin, dass man dadurch im Stande ist, den Wochentag des vorgesetzten Datums zu bestimmen. Dividirt man nämlich die dem Datum entsprechende Tageszahl der julianischen Periode durch sieben, so ist der Tag ein:

Montag,	wenn der Rest 0,
Dienstag,	" " " 1,
Mittwoch,	" " " 2,
Donnerstag,	" " " 3,
Freitag,	" " " 4,
Samstag,	" " " 5,
Sonntag,	" " " 6 ist.

Columnne gibt die Weltzeit der grössten Phase der Finsterniss in Stunden und Minuten. Die Angaben sind, abgesehen von der beträchtlichen Unsicherheit, die den Mondtafeln für entfernte Epochen anhaftet, als bis auf wenige Minuten richtig anzusehen.

Columnne enthält die Grösse der Finsterniss in Zollen und deren Decimaltheilen; alle Finsternisse, welche kleiner als 12 Zoll ausfallen, sind partiell, diejenigen, welche grösser werden, total. Bei Vergleichung dieser Angaben mit anderweitigen Rechnungsergebnissen wäre zu beachten, dass der Vergrösserungsfactor des Erdschattens $\frac{1}{40}$ angenommen wurde.

3. Columne führt in zwei Subcolumnen die halbe Zeitdauer der Partialität und die halbe Zeitdauer der totalen Verfinsterung auf, wobei unter der halben Dauer der Partialität die halbe zwischen der ersten und letzten äusseren Berührung des Vollschatens mit der Mondscheibe verfliessende Zeit, unter der halben Dauer der Totalität dagegen die halbe zwischen der ersten und letzten inneren Berührung des Vollschatens verfliessende Zeit zu verstehen ist. Da hierbei nur deren durchschnittliche Werthe angesetzt sind, so wird man in der halben Dauer bei partiellen Finsternissen in den extremsten Fällen um 6 Minuten, bei den totalen um 3 Minuten irren können.
7. Columne gibt in zwei Subcolumnen die Länge λ (östlich von Greenwich positiv, westlich negativ gezählt) und die Breite φ jenes Erdortes, für welchen zur Zeit der wahren Conjunction das Centrum des Erdschatens im Zenith steht.

Mit Hilfe der letzteren Angaben und mit Benützung der folgenden Tafel VII wird es leicht sein, zu entscheiden, ob eine gegebene Mondfinsterniss für einen Ort, dessen geographische Breite durch Φ , dessen östliche Länge von Greenwich (westliche Längen negativ genommen) mit l bezeichnet werden möge, sichtbar ist oder nicht. Man bildet zu diesem Zwecke zunächst:

$$l - \lambda \text{ oder } \lambda - l,$$

und benützt entweder die erste oder die zweite Form, um diesen Bogen stets positiv zu erhalten; liegt derselbe zwischen 180° und 360° , so bildet man überdiess seine Ergänzung zu 360° . Man erhält auf diese Weise einen stets positiven Bogen, der kleiner als 180° ist und mit h bezeichnet werden soll. Mit den Argumenten φ und Φ entlehnt man aus der Tafel VII, bei der man sich auf geographische Breiten bis $\pm 50^\circ$ beschränkt hat, und die nach der Formel:

$$\cos H = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \Phi$$

berechnet ist, den halben Tagbogen H . Es ist nun

die Phase der Finsterniss sichtbar, wenn $H > h$ ist,
 „ „ „ „ unsichtbar, „ $H < h$ „ .

Sollte Φ negativ sein, so geht man in die Tafel ein, indem man das Vorzeichen von Φ positiv annimmt und jenes von φ verkehrt.

Die hier aufgestellte Regel wird auch für den Beginn oder das Ende der Finsterniss benützt werden können, wenn man im ersteren Falle λ um eine entsprechende Correction vermehrt, im zweiten Falle um dieselbe Correction vermindert in Rechnung zieht. Diese Correction erhält man in Graden ausgedrückt, indem man die im Canon in Zeitminuten angegebene halbe Dauer der Verfinsterung durch 4 dividirt. Je nachdem man λ für Anfang oder Ende der Partialität oder für Anfang oder Ende der Totalität bestimmen will, wird man die halbe Dauer der Partialität oder diejenige der Totalität durch 4 zu dividiren haben.

Dieser eben erläuterte Rechnungsmechanismus kann aber leicht durch die Benützung eines Globus ersetzt werden. Will man nämlich alle jene Orte kennen, welche die Mitte der Finsterniss wahrnehmen können, so bringe man den durch λ und φ bestimmten Ort der Erdoberfläche durch entsprechende Drehung des Globus nach dem Zenith; alle Orte, die über dem sogenannten Horizonte des Globus liegen, werden die Finsterniss sehen, diejenigen aber, welche unter demselben stehen, nicht. Will man ähnlich jene Orte bestimmen, die den Anfang oder das Ende der Finsterniss sehen, so stelle man statt der Länge λ im ersten Falle $\lambda + \frac{\text{Halbe Dauer}}{4}$, im zweiten Falle $\lambda - \frac{\text{Halbe Dauer}}{4}$ ein und verfare in ähnlicher Weise. Je nachdem man die halbe Dauer der Partialität oder Totalität einstellt, wird die betreffende Bestimmung für den Anfang und das Ende der Partialität oder Totalität gelten.

III.

Iconographie zum Canon der Sonnenfinsternisse.

Die Karten haben den Zweck, die Hauptpunkte der Centralcurve zur bildlichen Anschauung zu bringen und bei den so wichtigen Untersuchungen, ob und welche Finsternisse für einen gegebenen Ort bedeutend sein können, als Leitfaden zu dienen. Zunächst finden sich die drei Hauptpunkte der Centralität, nämlich Centralität bei Sonnenaufgang (Δ), Centralität im Mittag (\circ), Centralität bei Sonnenuntergang (\blacktriangle) in der Karte eingetragen. Um die drei zusammengehörigen Punkte sofort zusammenfinden zu können, wurden dieselben durch einen Kreisbogen verbunden. Die Art der Zeichnung des Kreisbogens weist auf die Gattung der Finsterniss hin; erscheint nämlich derselbe ganz ausgezogen, so ist die Finsterniss eine totale, erscheint er punktirt, so ist die Finsterniss eine ringförmige, wechseln Punkte mit kürzeren Linien ab, so ist die Finsterniss eine ringförmig-totale. Am Curvenbogen selbst ist an passender Stelle das Datum der Finsterniss in einer Weise ersichtlich gemacht, welche kaum einen Zweifel darüber bestehen lässt, zu welcher Curve das betreffende Datum gehört. Es ist klar, dass diese so ausgezogenen Kreisbogen in einer gewissen Annäherung sich dem Verlaufe der Curve der Centralität anschliessen und umso mehr der Wahrheit nahe kommen werden, je näher das betreffende Curvenstück einem der Hauptpunkte liegt; selbst aber von diesen Punkten entfernter liegende Curvenstücke werden sich in nicht allzu erheblicher Weise von der Wahrheit entfernen, so dass die Fehler bei dem kleinen Massstabe der Karte in nicht allzu bemerklicher Weise zum Ausdruck gelangen. Man kann daher, ohne irgend erheblichen Täuschungen unterworfen zu sein, die so ausgezogenen Kreisbogen mit der Curve der Centralität identificiren, und die Karten geben sonach vorzügliche Hilfsmittel ab, alle für eine bestimmte Localität bedeutenden Finsternisse mit Sicherheit herausuchen zu können; doch darf man hierbei niemals vergessen, dass die von den Hauptpunkten entfernt liegenden Punkte oft wesentliche Abweichungen zeigen können, und dass besonders für die älteren Zeiten die Rechnung selbst einigermassen unzuverlässig wird, in Folge der Unsicherheiten, die unseren gegenwärtigen Mondtheorien anhaften.

Es ereignete sich nicht selten, dass die den Kreisbogen bestimmenden Hauptpunkte insofern ungünstig gelegen waren, als zwei derselben aneinander so nahe zu liegen kamen, dass dadurch eine sichere Bestimmung der Lage des Kreisbogens vereitelt wurde. Um hier der angestrebten Idee, die Kreisbogen als Ersatz für die Curve der Centralität gelten zu lassen, möglichst nahe zu kommen, wurde für einen entsprechend gewählten Stundenwinkel ein vierter, für die Bestimmung des Kreisbogens günstig gelegener Punkt ermittelt, der dann zur Bestimmung der Lage des Kreisbogens verworther wurde, wobei aber in Folge der übersichtssigen Bedingung der Zug dieses letzteren nur so gewählt werden konnte, dass er sich den beiden naheliegenden Punkten möglichst anschmiegte. Um in diesem Falle aber nicht die Hauptpunkte ausserhalb der Curve setzen zu müssen, wurden dieselben, wenn auch nur durch eine Correction in den nächstliegenden Theil der Curve verrückt. Dieser Vorgang wurde bei den folgenden Curven eingehalten:

Nr. 217, 261, 300, 304, 347, 390, 507, 709, 732, 879, 986, 1513, 1642, 1889, 2233, 2670, 2687, 2967, 3246, 3420, 3435, 3773, 3989, 4048, 4605, 4648, 4690, 4714, 4732, 4806, 4913, 4927, 5070, 5137, 5164, 5270, 5339, 6101, 6169, 6565, 7385, 7666, 7691, 7810.

Die Berechnung dieser Curvenpunkte ist grösstentheils von den Herrn F. K. Ginzel und A. Steinmaszler, ausgeführt worden und ebenso die weiter unten erwähnten Zusatzrechnungen bezüglich jener Finsternisse, für welche die Hauptpunkte der zwölfzölligen Curve zu ermitteln waren.

Für jene Curven, die statt des Mittagspunktes nur einen Mitternachtspunkt (\bullet) besitzen, wurde derselbe Vorgang wie oben eingeschlagen, nur dass die so ermittelten Curven relativ häufig zwei naheliegende Punkte zeigten, für welche in ähnlicher Weise, wie dies oben auseinandergesetzt wurde, Abhilfe geschaffen wurde. Für jene Curven, für welche der Mittags- oder Mitternachtspunkt imaginär wurde, sind zur Bestimmung der Lage eines Kreisbogens zu wenig Bedingungen vorhanden. Um aber auch hier den zu zeichnenden Verbindungsbogen der

Curve der Centralität möglichst nahe zu bringen, wurde für einen passend gewählten Stundenwinkel oder geographische Breite ein nahe in der Mitte gelegener dritter Punkt ermittelt, der zur Bestimmung des Kreishogens diente; doch sind solche Punkte in der Karte nicht besonders markirt worden. Die bezüglichen Finsternisse hier hervorzuheben, erscheint unnöthig, da dieser Vorgang bei allen Finsternissen, deren Mittags- oder Mitternachtspunkt imaginär ist, und die auf der nördlichen Hemisphäre sich zeigen, befolgt wurde.

Ganz dasselbe Verfahren wurde für jene Curven eingehalten, für welche die Grenzcurve von 12 Zoll (südlich) berechnet wurde, und die Finsternisse in der Karte nicht weiter von den übrigen unterschieden. Von den letztgenannten Finsternissen werden viele sehr klein; man hat bei diesen zu beachten, dass das Gebiet der Sichtbarkeit auf der Seite der Convexität zu suchen ist.

Eine derartige bildliche Darstellung, welche die Kosten des vorliegenden Werkes wesentlich erhöhte, dient wohl nur zur Leitung bei historischen Untersuchungen, hat daher für Finsternisse, die sich auf der südlichen Halbkugel allein abspielen, keine wesentliche Bedeutung; ich habe mich daher entschlossen, nur jene Curven einzutragen, die nördlich über den — 30. Breitengrad ansteigen; es kommen daher auch Bruchstücke von Curven, soweit dieselben in das Bereich der Karten fallen, zur Darstellung. Manche der Curven erscheinen durch die Grenze der Karten in zwei Theile zerfällt; jeder dieser Theile erhielt die ihm zukommende Bezeichnung. Ausgeschlossen von der Darstellung wurden jene wenigen, kaum in Betracht kommenden Curven, die, ohne dass einer ihrer Hauptpunkte in der Karte liegt, mit einem geringen Theile ihres Zuges dennoch in das Gebiet der Karte gelangen.

Die Curven wurden mit grosser Sorgfalt von Herrn J. Strobl in Karten eingezeichnet. Die Übertragung dieser auf den Stein wurde zwar in ziemlich befriedigender Weise ausgeführt, doch ging ein Theil der Genauigkeit, welche das Original aufwies, verloren. Es würde die Kosten der Iconographie wesentlich erhöht haben, hätte man durchaus die in den Zeichnungen des Herrn Strobl erlangte Genauigkeit erreichen wollen. Da aber diese Karten nur den Zweck haben, einen Überblick zu gewähren, und der Verlauf der Curven, besonders in jenen Theilen, welche den berechneten Hauptpunkten fern liegen, ohnedies häufig genug ziemlich von der Wahrheit entfernt ist, habe ich mich begnügt, in den Karten eine solche Annäherung als ausreichend zu betrachten, bei der keine Abweichung, im grössten Kreise gezählt, mehr als einen Grad beträgt.

I.

Canon der Sonnenfinsternisse.
